

**MENDAPATKAN FUNGSI *GREEN* YANG DIKONSTRUKSI  
DARI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR  
DALAM BIDANG FISIKA (Studi Kasus: *Vibrasi Sistem Mekanis*)**



**SKRIPSI**

Diajukan untuk Memenuhi salah Satu Syarat dalam Meraih Gelar Sarjana Sains  
Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar

Oleh

**GUSTI SARLINA**  
NIM. 60600109006

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI ALAUDDIN MAKASSAR  
2013**

## **PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI**

Dengan penuh kesadaran, penyusun yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi ini benar adalah hasil karya penyusun sendiri. Jika di kemudian hari terbukti bahwa ia merupakan duplikat, tiruan, plagiat, atau dibuat oleh orang lain, sebagian atau seluruhnya, maka skripsi dan gelar yang diperoleh karenanya batal demi hukum.

Makassar, Agustus 2013  
Penyusun,

**GUSTI SARLINA**  
NIM: 60600109006

## PERSETUJUAN PEMBIMBING

Pembimbing penulisan skripsi Saudari **Gusti Sarlina**, NIM: 60600109006, mahasiswa Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar, setelah dengan seksama meneliti dan mengoreksi skripsi yang bersangkutan dengan judul “**Mendapatkan Fungsi *Green* yang Dikonstruksi dari Persamaan Diferensial Linear dalam Bidang Fisika (Studi Kasus: *Vibrasi Sistem Mekanis*)**” memandang bahwa skripsi tersebut telah memenuhi syarat-syarat ilmiah dan dapat disetujui untuk diajukan ke sidang *munaqasyah*..

Demikian persetujuan ini diberikan untuk di proses lebih lanjut.

Makassar,        Juli 2013

Pembimbing I

Pembimbing II

**Irwan, S.Si., M.Si**  
Nip : 19780922 200604 1001

**Wahidah Alwi, S.Si., M.Si.**  
Nip : 19790201 200912 2002

Mengetahui ,  
Ketua Jurusan Matematika

**Ermawati S.Pd., M.Si**  
Nip : 19830717 200912 2004

## PENGESAHAN SKRIPSI

Skripsi yang berjudul “Mendapatkan Fungsi *Green* yang Dikontruksi dari Persamaan Diferensial Linear dalam Bidang Fisika (Studi kasus: *Vibrasi Sistem Mekanis*)”, yang disusun oleh saudari **Gusti Sarlina**, Nim: **60600109006**, Mahasiswa Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar, telah diuji dan dipertahankan dalam sidang *munaqasyah* yang diselenggarakan pada hari Jumat tanggal **2 Agustus 2013 M**, bertepatan dengan **24 Ramadhan 1434 H**, dinyatakan telah dapat diterima sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.).

Makassar, 2 Agustus 2013 M  
24 Ramadhan 1434 H

### DEWAN PENGUJI

Ketua : Dr. Muh. Khalifah Mustami, M.Pd. (.....)  
Sekretaris : Wahyuni Abidin, S.Pd., M.Pd. (.....)  
Munaqisy I : Try Azisah Nurman, S.Pd., M.Pd. (.....)  
Munaqisy II : Ermawati, S.Pd., M.Si. (.....)  
Munaqisy III : Muh. Rusdy Rasyid, S.Ag., M.Ag., M.Ed (.....)  
Pembimbing I : Irwan, S.Si., M.Si. (.....)  
Pembimbing II : Wahidah Alwi, S.Si., M.Si. (.....)

Diketahui oleh:  
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Alauddin Makassar

Dr. Muh. Khalifah Mustami, M.Pd.  
Nip. 19711204 200003 1 001

## KATA PENGANTAR



*Alhamdulillah rabbil'alamin*, segala puji syukur ke hadirat Allah Swt atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “ Mendapatkan Fungsi *Green* yang Dikonstruksi dari Persamaan Diferensial Linear dalam Bidang Fisika (Studi Kasus: *Vibrasi Sistem Mekanis*)” ini. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad Saw., sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Melalui tulisan ini pula, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus, teristimewa kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda **H. Gusti Peln****Arifin** dan Ibunda **Hj. Hapsiah** atas segala doa, restu, kasih sayang, pengorbanan dan perjuangan yang telah diberikan selama ini. Kepada beliau penulis senantiasa memanjatkan doa semoga Allah Swt., mengasihi dan mengampuni dosanya. Amin.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, pengarahan dan bantuan dari berbagai pihak baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun do'a. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Abdul Qadir Gassing, HT, M.S., selaku Rektor UIN Alauddin Makassar beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak Dr. Muhammad Khalifah Mustami, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar.

3. Ibu Ermawati, S.Pd.,M.Si. dan Ibu Wahyuni Abidin, S.Pd., M.Pd selaku ketua dan sekretaris Jurusan Matematika
4. Bapak Irwan, S.Si.,M.Si. dan Ibu Wahidah Alwi, S.Si.,M.Si. selaku pembimbing I dan II yang dengan sabar telah meluangkan waktu demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Seluruh dosen jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar yang telah menyalurkan ilmunya kepada penulis selama berada di bangku kuliah.
6. Segenap karyawan dan karyawanati Fakultas Sains dan Teknologi yang telah bersedia melayani penulis dari segi administrasi dengan baik selama penulis terdaftar sebagai mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar.
7. Kakak-kakakku tercinta, Sardi, Jumi, Tuti, Bada dan adikku tersayang Vina, Vita, Sarda, Ullah, Yana, Rama, dan Surya yang selalu memberikan doa, semangat dan dukungan selama ini. Untuk keponakanku tercinta Gusti Mulya Sari dan Gusti Adwa Ainul Mardiah. Kalian penyemangat dalam setiap langkah perjalanan menempuh pendidikan. Khususnya kepada kak Sardi dan kak Jumi, terima kasih atas kasih sayang, semua saran, do'a, nasehat dan motivasinya agar selalu semangat dalam menyelesaikan skripsi ini. Begitu banyak hal yang telah diberikan kepada penulis untuk tetap tegar dalam menghadapi kerasnya kehidupan.
8. Seluruh teman-teman seperjuangan di keluarga "*Fractonity Alkharismi 09*" yang telah memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan skripsi.

9. Untuk kak Muhammad Kafrawi S,Si, kak Ahmad Suratmi dan Marlisa terima kasih atas bantuannya.

10. Saudara-saudara yang telah banyak memberikan bantuan berupa moril dan materil yang tidak bisa saya sebutkan namanya satu persatu. Rasa terima kasih yang tiada hentinya penulis haturkan, semoga bantuan yang telah diberikan bernilai ibadah di sisi Allah Swt., dan mendapat pahala yang setimpal. Amin.

Akhirnya, diharapkan agar hasil penelitian ini dapat bermanfaat dan menambah khasanah ilmu pengetahuan.

*Amin Ya Rabbal Alamin*

Makassar, Agustus 2013

**Penulis**

## DAFTAR ISI

	hal
HALAMAN SAMPUL .....	i
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI .....	ii
PERSETUJUAN PEMBIMBING .....	iii
PENGESAHAN SKRIPSI .....	iv
PENGESAHAN PEMBIMBING .....	v
KATA PENGANTAR .....	vi
DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR GAMBAR .....	x
ABSTRAK .....	xi
BAB I PENDAHULUAN .....	1
A. Latar Belakang .....	1
B. Rumusan Masalah .....	4
C. Tujuan Penelitian .....	5
D. Manfaat Penelitian .....	5
E. Batasan Masalah .....	6
F. Sistematika Penulisan .....	6
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	9
A. Persamaan Diferensial .....	9
B. Persamaan Diferensial Linear .....	11
C. Persamaan Diferensial Linear Homogen dengan Koefisien Konstan ...	13
D. Bebas Linear dan Determinan <i>Wronskian</i> .....	19
E. Metode Variasi Parameter .....	20
F. Aturan Cramer .....	24
G. Fungsi <i>Green</i> .....	28



H. Integral Parsial .....	29
I. Masalah Nilai Awal .....	31
J. Tinjauan dalam Bidang Fisika ( <i>Vibrasi Sistem Mekanis</i> ) .....	33
BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....	42
A. Jenis Penelitian .....	42
B. Sumber Data .....	42
C. Waktu dan Lokasi Penelitian .....	42
D. Prosedur Penelitian .....	42
BAB IV PEMBAHASAN .....	44
A. Hasil Penelitian .....	44
B. Pembahasan .....	73
BAB V PENUTUP .....	76
A. Kesimpulan .....	76
B. Saran-saran .....	76
DAFTAR PUSTAKA .....	78

## DAFTAR GAMBAR

	hal
Gambar 1 Gerak Harmonik .....	56
Gambar 2 Osilasi Teredam .....	63
Gambar 3 Osilasi Teredam Kritis .....	68
Gambar 4 Osilasi Terlalu Teredam .....	73

## ABSTRAK

Nama : Gusti Sarlina  
Nim : 60600109006  
Judul : **Mendapatkan Fungsi *Green* yang Dikonstruksi dari Persamaan Diferensial Linear dalam Bidang Fisika (Studi Kasus: *Vibrasi Sistem Mekanis*)**

---

Skripsi ini membahas tentang persamaan diferensial yang merupakan suatu persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas. Dengan memperhatikan banyaknya variabel bebas yang terlibat, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Jenis persamaan diferensial dapat dilihat dari bentuk, orde, koefisien maupun kelinearannya, sehingga banyak cara menyelesaikannya. Salah satunya dapat diselesaikan dengan cara menggunakan metode fungsi *green*. Pada skripsi ini dibagi menjadi dua pembahasan yaitu untuk mendapatkan fungsi *green* pada persamaan diferensial dan untuk mendapatkan fungsi *green* pada studi kasus dalam bidang fisika yaitu *Vibrasi Sistem Mekanis*. Terdapat dua kasus yaitu tidak ada peredam dalam sistem dan terdapat peredam dalam sistem. Fungsi *green* dapat ditemukan dengan menggunakan metode variasi parameter, dimana hasil untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter sebagai berikut:

$$G(x, t) = \frac{v_1(t) \cdot y_1(x) + v_2(t) \cdot y_2(x) + \dots + v_n(t) \cdot y_n(x)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]}. \text{ Untuk mendapatkan fungsi}$$

*green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter dalam bidang fisika yang studi kasusnya yaitu vibrasi sistem mekanis,

$$\text{dapat dilihat sebagai berikut : } G(t, x) = \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]}.$$

*Kata Kunci: Fungsi Green, Persamaan Diferensial Linear, Vibrasi Sistem Mekanis.*

## BAB I PENDAHULUAN

### A. Latar Belakang Masalah

Sesungguhnya Allah Swt., menunjukkan tanda-tanda kekuasaan-Nya kepada hamba-Nya melalui dua jalur, yaitu jalur formal yang berupa ayat-ayat *qauliyah* dan jalur non formal yang berupa ayat-ayat *kauniyah*. Ayat-ayat *qauliyah* merupakan suatu kalam Allah Swt., yang diturunkan secara formal kepada Nabi Muhammad Saw. Sedangkan ayat-ayat *kauniyah* merupakan suatu fenomena alam dimana fenomena alam yang terjadi merupakan ciptaan Allah Swt., sekaligus sebagai tanda kebesaran-Nya di bumi ini, sehingga merupakan jalur non formal dan manusia sendirilah yang nantinya mengeksplorasinya. Dimana upaya tersebut dikenal sebagai sains, dan aplikasinya disebut teknologi. Jika berbicara tentang sains, maka tidak lepas dari matematika. Jauh sebelumnya, umat Islam telah menyadari bahwa Al-Qur'an terdapat banyak penjelasan akan ilmu matematika.<sup>1</sup>

Allah Swt., berfirman dalam surah Q.S Al-Maidah 5/65-66 :

يَأَيُّهَا النَّبِيُّ حَرِّضِ الْمُؤْمِنِينَ عَلَى الْقِتَالِ ۚ إِنْ يَكُنْ مِنْكُمْ عِشْرُونَ صَابِرُونَ  
يَغْلِبُوا مِائَتَيْنِ ۚ وَإِنْ يَكُنْ مِنْكُمْ مِائَةٌ يَغْلِبُوا أَلْفًا مِنَ الَّذِينَ كَفَرُوا بِأَنَّهُمْ قَوْمٌ  
لَّا يَفْقَهُونَ ﴿٦٥﴾ أَلَمْ تَرَ أَنَّا جَعَلْنَا فِيكُمْ ضَعْفًا ۚ فَإِنْ يَكُنْ

---

<sup>1</sup> Drs. Abdul Rahman, M.Pd dan Nursalam, M.Si. 2007. *Persamaan Diferensial Biasa Teori dan Aplikasi*. Makassar : Tim Penulis,hal.1

مِّنْكُمْ مِّائَةٌ صَابِرَةٌ يَغْلِبُوا مِائَتَيْنِ<sup>ج</sup> وَإِنْ يَكُنْ مِنْكُمْ أَلْفٌ يَغْلِبُوا أَلْفَيْنِ بِإِذْنِ اللَّهِ<sup>ق</sup>

وَاللَّهُ مَعَ الصَّابِرِينَ ﴿٦٦﴾

Terjemahnya :

“Hai Nabi, kobarkanlah semangat para mukmin untuk berperang. Jika ada dua puluh orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ratus orang musuh. Dan jika ada seratus orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan seribu dari pada orang kafir, disebabkan orang-orang kafir itu kaum yang tidak mengerti. Sekarang Allah Telah meringankan kepadamu dan Dia telah mengetahui bahwa padamu ada kelemahan. Maka jika ada diantaramu seratus orang yang sabar, niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ratus orang kafir; dan jika diantaramu ada seribu orang (yang sabar), niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ribu orang, dengan seizin Allah. dan Allah beserta orang-orang yang sabar.” (Q.S. Al-Maidah: 5)<sup>2</sup>

Pada ayat 65 disebutkan bahwa 20 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 200 orang kafir, dan 100 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 1000 orang kafir. Sedangkan pada ayat 66 disebutkan bahwa, karena adanya kelemahan, 100 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 200 orang kafir, dan 1000 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 2000 orang kafir. Meskipun ayat tersebut berbicara dalam konteks perjuangan antara orang-orang beriman dengan orang-orang kafir, akan tetapi pada sisi yang lain penyebutan angka-angka pada kedua ayat tersebut, terdapat pula konsep matematika.

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari dan memiliki peranan penting untuk ilmu pengetahuan lain seperti fisika, biologi, kimia dan ilmu-ilmu lainnya. Sehingga matematika banyak digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang dihadapi dalam bidang

<sup>2</sup> Departemen Agama RI, *Alqur'an dan Terjemahannya*, (Jakarta: Lembaga Percetakan Al-Qur'an Raja Fahd dan Kementrian Agama RI), h.165.

sains dan teknologi dimana sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat dicari dengan hanya menggunakan rumus atau konsep yang sudah ada. Karena adanya permasalahan mengenai kuantitas bahwa perubahan terus menerus yang berkaitan dengan waktu dapat digambarkan dengan suatu persamaan diferensial.

Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas. Dengan memperhatikan banyaknya variabel bebas yang terlibat, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa jika hanya ada satu variabel bebas yang terlibat dan persamaan diferensial parsial jika ada lebih dari satu variabel bebas yang terlibat.<sup>3</sup>

Persamaan Diferensial Biasa dapat digolongkan dalam dua kelas yaitu persamaan diferensial tak linear dan persamaan diferensial linear. Dibandingkan dengan jenis yang kedua, penyelesaian persamaan diferensial linear jauh lebih mudah ditentukan karena sifat-sifat selesaiannya dapat dikarakterisasikan dalam suatu cara yang umum dan metode baku tersedia untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut. Menurut bentuk persamaannya, suatu persamaan diferensial linear dapat dibedakan menjadi dua yakni persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial tak homogen. Sedangkan menurut ordenya dapat dibedakan menjadi orde satu, orde dua sampai dengan orde- $n$ .

Fungsi *green* merupakan suatu metode penyelesaian yang dalam proses menemukan penyelesaian suatu persamaan diferensial linear, dimana terlebih

---

<sup>3</sup> Kartono, 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta : Graha Ilmu. hal.3

dahulu ditentukan nilai fungsi *green* dari suatu persamaan diferensial tersebut. Nilai fungsi *green* dapat ditemukan dengan metode transformasi *Laplace* dan metode variasi parameter. Dalam Jurnal Integral yang berjudul “Mengkontruksi Fungsi *Green* Persamaan Diferensial Linear Orde- $n$ ”, sehingga memotivasikan penulis untuk mencoba melengkapi dan menjelaskan kepada pembaca mengenai metode fungsi *green* dan penyelesaian suatu persamaan diferensial tersebut yang di sertai dengan studi kasus dalam bidang fisika.

Pengaplikasian dalam bidang fisika dimana hampir sebagian besar gejala yang dibahas dalam fisika memiliki kaitan dengan permasalahan laju perubahan dari suatu besaran fisis tertentu. Contoh paling sederhana yang telah lama dijumpai adalah laju perubahan kecepatan suatu partikel terhadap waktu akibat gaya yang bekerja padanya sebagaimana diatur oleh Hukum Newton kedua. Secara matematik, gambaran dinamika perubahan tersebut dituang dalam bentuk persamaan diferensial.

Persamaan diferensial yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah **“Mendapatkan Fungsi *Green* yang Dikontruksi dari Persamaan Diferensial Linear dalam Bidang Fisika (Studi Kasus: *Vibrasi Sistem Mekanis*)”**.

## **B. Rumusan Masalah**

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter?

2. Bagaimana mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter dalam studi kasus *vibrasi sistem mekanis*?

### **C. Tujuan Penelitian**

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter.
2. Untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter dalam bidang fisika dengan studi kasus *vibrasi sistem mekanis*.

### **D. Manfaat Penelitian**

Manfaat penelitian ini adalah:

1. Jurusan Matematika

Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

2. Penulis

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk tugas akhir, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.



### 3. Pembaca

Menambah pengetahuan bidang matematika, khususnya persamaan diferensial biasa dan fungsi *green* yang melalui metode variasi parameter.

### 4. Pengembangan Ilmu Pengetahuan

Menambah informasi dan mempertegas keilmuan matematika dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

## E. Batasan Masalah

Dalam penulisan tugas akhir ini, pembahasannya hanya dibatasi pada:

1. Metode yang digunakan untuk mengkonstruksi fungsi *green* adalah metode variasi parameter.
2. Fungsi *green* yang digunakan pada persamaan diferensial linear yaitu fungsi *green* khusus yang merupakan suatu integral substitusi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear.
3. Aplikasi pada persamaan diferensial hanya pada bidang fisika yaitu *Vibrasi Sistem Mekanis* dan hanya sampai pada orde kedua.

## F. Sistematika Penulisan

Agar penulisan tugas akhir ini tersusun secara sistematis, maka penulis memberikan sistematika penulisan sebagai berikut:

### 1. Bagian Awal Tugas Akhir

Terdiri dari halaman judul, pernyataan keaslian skripsi, persetujuan pembimbing, pengesahan skripsi, kata pengantar, daftar isi, daftar gambar, dan abstrak.

## 2. Bagian Isi Tugas Akhir

Bab I yaitu pendahuluan yang membahas tentang isi keseluruhan penulisan tugas akhir yang terdiri dari latar belakang dimana membahas tentang gambaran umum dari rencana penelitian ini, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II yaitu tinjauan pustaka yang memaparkan tentang teori-teori yang berhubungan dengan penulisan tugas akhir ini seperti persamaan diferensial, persamaan diferensial linear, persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan, bebas linear dan determinan *Wronski*, metode variasi parameter, aturan cramer, fungsi *green*, integral parsial, masalah nilai awal dan tinjauan dalam bidang fisika (*vibrasi sistem mekanis*).

Bab III yaitu metodologi penelitian yang memuat tentang metode yang berisi langkah-langkah yang ditempuh untuk memecahkan masalah, yaitu jenis penelitian, waktu dan lokasi penelitian, jenis dan sumber data, dan prosedur penelitian.

Bab IV yaitu pembahasan yang memuat tentang mengenai langkah-langkah dalam mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter, yang disertai contoh permasalahan dalam bidang fisika dimana studi kasusnya yaitu *vibrasi sistem mekanis* yang kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode mengkonstruksi fungsi *green*.

Bab V yaitu penutup, yang di dalamnya berisikan tentang kesimpulan dari pembahasan (Bab IV) dan saran-saran.

### 3. Bagian Akhir Tugas Akhir

Bagian ini berisi daftar pustaka sebagai acuan dan lampiran-lampiran yang mendukung.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### A. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas.<sup>4</sup>

#### Definisi 2.1 :

Persamaan Diferensial Biasa adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap satu peubah tak bebas.<sup>5</sup> Jika diambil  $y(x)$  sebagai suatu fungsi satu variabel, dengan  $x$  dinamakan variabel bebas dan  $y$  dinamakan variabel tak bebas, maka suatu persamaan diferensial biasa (disingkat PDB) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0, \quad (2.1)$$

di mana :

$y$  adalah fungsi dari variabel bebas  $x$

$y', y'', \dots, y^n$  adalah turunan  $1, 2, \dots, n$ .

Bentuk persamaan di atas menyatakan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas  $x$  dan variabel tak bebas  $y$  beserta derivatif-derivatifnya dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol yang menyatakan

---

<sup>4</sup> Sudaryatno Sudirham. *Integral dan Persamaan Diferensial*. (<http://persamaan-diferensial-ordel1.pdf-Adobe.Reader>). Diakses tanggal 7 desember 2012.

<sup>5</sup> Drs. Abdul Rahman, M.Pd dan Nursalam, M.Si. 2007. *Persamaan Diferensial Biasa Teori dan Aplikasi*. Makassar : Tim Penulis. hal.18.

model matematika dari fenomena perubahan terjadi. Sebuah persamaan diferensial disebut mempunyai orde- $n$  jika orde turunan tertinggi yang terlibat adalah  $n$ , sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi itu berderajat  $k$  maka persamaan itu dinamakan persamaan diferensial berderajat  $k$ .

**Contoh 2.1 :**

1.  $y' = \frac{1}{x}$  merupakan persamaan diferensial biasa orde satu
2.  $y'' = \frac{1}{x^2}$  merupakan persamaan diferensial biasa orde dua
3.  $y''' = \frac{1}{x^3}$  merupakan persamaan diferensial biasa orde tiga

dimana  $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, y^n = \frac{d^ny}{dx^n}$  yang mendiferensialkan fungsi dari dua variabel atau lebih.<sup>6</sup>

**Definisi 2.2 :**

Persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas disebut persamaan diferensial parsial.<sup>7</sup> Maka suatu persamaan diferensial parsial (disingkat PDP) dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dz}, \dots\right) = 0 \quad (2.2)$$

**Contoh 2.2 :**

1.  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  merupakan persamaan diferensial parsial orde satu

---

<sup>6</sup> Darmawijoyo, 2011. *Persamaan Diferensial Biasa: Suatu Pengantar*. Palembang: Penerbit Erlangga.h.1.

<sup>7</sup> Drs. Abdul Rahman, M.Pd dan Nursalam, M.Si. 2007. *Persamaan Diferensial Biasa Teori dan Aplikasi*. Makassar : Tim Penulis. hal.18.

2.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  merupakan persamaan diferensial parsial orde dua

**Definisi 2.3 :**

Orde atau tingkat dari suatu persamaan diferensial ditentukan oleh tingkat derivatif yang tertinggi yang terdapat pada persamaan tersebut .<sup>8</sup>

**Definisi 2.4 :**

Derajat atau pangkat dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat dari derivatif yang mempunyai tingkat tertinggi dari persamaan tertentu .<sup>9</sup>

**Contoh 2.3 :**

1.  $\frac{dy}{dx} = 2x$  merupakan persamaan diferensial biasa orde pertama dan derajat pertama.
2.  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4 - y^2$  merupakan persamaan diferensial biasa orde pertama dan derajat kedua.
3.  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y(x^2 + 1) = \sin x$  merupakan persamaan diferensial biasa orde pertama dan derajat ketiga.

**B. Persamaan Diferensial Linier**

**Definisi 2.5 :**

Persamaan diferensial linear adalah suatu persamaan diferensial yang berpangkat satu dengan peubah tak bebas beserta turunan-turunannya.<sup>10</sup>

Sebuah persamaan diferensial linier orde- $n$  memiliki bentuk

---

<sup>8</sup> Fendi Alfi Fauzi. *Persamaan Diferensial*. (<http://pd-completed.pdf-Adobe.Reader>). Diakses tanggal 7 desember 2012.

<sup>9</sup> Ibid

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.3)$$

di mana  $f(x)$  dan koefisien  $a_i(x)$ , dengan  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  tergantung hanya pada variabel  $x$ . Dengan kata lain, persamaan-persamaan ini tidak tergantung pada  $y$  atau pada turunan dari  $y$ .

#### Contoh 2.4 :

1.  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + xy = x^2$  merupakan persamaan diferensial linear orde dua
2.  $\frac{d^2 y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} + xy = x^2$  merupakan persamaan diferensial tak linear orde dua

Pada Contoh 2 merupakan persamaan diferensial tak linear, karena dapat dilihat dari bentuk seperti  $y\frac{dy}{dx}$ . Dari kedua contoh tersebut persamaan diferensial itu menemukan  $y = f(x)$  yang memenuhi contoh tersebut dan inilah yang disebut dengan solusi persamaan diferensial. Dengan menyelesaikan masing-masing kedua contoh di atas maka akan diperoleh solusi  $y = f(x)$ .<sup>11</sup>

Jika  $f(x) = 0$ , maka Persamaan (2.3) adalah homogen; jika  $f(x) \neq 0$  maka Persamaan (2.3) adalah tak homogen.<sup>12</sup>

#### Contoh 2.5 :

1.  $x\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = \sin x$  merupakan persamaan tak homogen

---

<sup>10</sup> Abdul Rahman, 2007. *Persamaan Diferensial Biasa Teori dan Aplikasi*. (Makassar: Tim Penulis), h.19

<sup>11</sup> Kartono, 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta : Graha Ilmu. Hal.3

<sup>12</sup> Richar Bronson, 2007. *Persamaan Diferensial Edisi Ketiga*. (Jakarta: Penerbit Erlangga), h.51

2.  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 2xy = 0$  merupakan persamaan homogen

Jika  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  adalah konstanta, Persamaan (2.3) dikatakan mempunyai koefisien konstanta, dalam hal lain dikatakan mempunyai koefisien peubah.<sup>13</sup>

### C. Persamaan Diferensial Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

Persamaan diferensial linear homogen orde- $n$  dengan koefisien konstan berbentuk sebagai berikut :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2.4)$$

dengan  $a_n \neq 0$ .<sup>14</sup>

Dalam menentukan solusi persamaan diferensial homogen dilakukan hal berikut :

Misalkan  $y = e^{rx}$  merupakan solusi persamaan diferensial homogen. Sehingga dimisalkan  $ay'' + by' + cy = 0$ . Dengan mensubstitusikan solusi tersebut dan turunannya ke dalam persamaan diferensial didapatkan :

$$a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) = 0$$

Untuk mendapatkan nilai turunan pertama dan turunan kedua maka :

- nilai  $f(x) = e^{rx}$
  - nilai  $f'(x) = e^{rx} \cdot r$
- $$= re^{rx}$$

---

<sup>13</sup> Murray R Spiegel dan Koko Martono, *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuan*. (Bandung: Penerbit Erlangga, 1971), hal.77

<sup>14</sup> Mohamed Amine Khamisi. (<http://www.sosmath.com/differential/equation/byparts/byparts.htm>). diakses tanggal 2 januari 2013



- nilai  $f''(x) = u'v + uv'$

Misalkan 
$$\begin{aligned} u &= r & v &= e^{rx} \\ u' &= 0 & v' &= r \cdot e^{rx} \end{aligned}$$

Sehingga 
$$\begin{aligned} f''(x) &= u'v + uv' \\ &= (0)(e^{rx}) + (r)(re^{rx}) \\ &= r^2 e^{rx} \end{aligned}$$

Jadi  $a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) = 0$

$$\begin{aligned} a(r^2 e^{rx}) + b(re^{rx})' + c(e^{rx}) &= 0 \\ e^{rx}(ar^2 + br + c) &= 0 \end{aligned}$$

Sebab  $e^{rx} \neq 0, \forall x \in \mathfrak{R}$ , maka  $ar^2 + br + c = 0$  disebut persamaan karakteristik dari persamaan diferensial.<sup>15</sup> Akar persamaan karakteristik dari persamaan diferensial adalah :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \end{aligned} \quad \text{dan} \quad \begin{aligned} r_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \end{aligned}$$

Kemungkinan nilai  $r_1$  dan  $r_2$  bergantung dari nilai  $D$ , yaitu :

a. Bila  $D > 0$  maka  $r_1 \neq r_2$  (akar real dan berbeda)

Jika akar-akar persamaan karakteristik adalah real dan semuanya berbeda, maka solusi persamaan  $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$  merupakan bilangan real dan berbeda,  $r_1 \neq r_2$ . Maka  $y_1(x) = e^{r_1 x}$  dan  $y_2(x) = e^{r_2 x}$

---

<sup>15</sup>Danang Mursita, *Matematika untuk Perguruan Tinggi*. (Bandung:Rekayasa Sains.2011), h.234

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \quad (2.5)$$

**Contoh 2.6 :**

Tentukan solusi umum persamaan diferensial :  $y'' - 4y' + 3y = 0$ .

Jawab:

Substitusikan  $y = e^{rx}$ , sehingga diperoleh persamaan karakteristik, yaitu:

$$(e^{rx})'' - 4(e^{rx})' + 3(e^{rx}) = 0$$

$$e^{rx}(r^2 - 4r + 3) = 0$$

dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana  $a = 1, b = -4$  dan  $c = 3$  sehingga

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2}$$

Sebab  $D = b^2 - 4ac$  maka persamaan  $r^2 - 4r + 3 = 0$  dengan  $a = 1, b = -4$  dan

$c = 3$  dapat diperoleh  $D = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$ , sehingga  $D > 0$  maka  $r_1 \neq r_2$

merupakan akar real dan berbeda, sehingga dapat diperoleh  $r_1 = \frac{4+2}{2}$  dan

$$r_2 = \frac{4-2}{2}, \text{ atau } r_1 = 3 \text{ dan } r_2 = 1.$$

Jadi solusi umumnya adalah  $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$

b. Bila  $D < 0$  maka  $r_1, r_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks, maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Jika tidak ada akar yang sama, maka solusi umumnya adalah  $y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$ . Sehingga solusi kompleks  $e^{(\lambda+i\mu)x}$  dan  $e^{(\lambda-i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi realnya  $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$ . Jadi, solusi umum persamaan diferensial yang mempunyai akar-akar kompleks adalah

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (2.6)$$

### Contoh 2.7 :

Tentukan solusi umum persamaan diferensial  $y^{iv} - y = 0$ .

Jawab :

Substitusikan  $y = e^{rx}$ , diperoleh persamaan karakteristik, yaitu:

$$r^4 - 1 = 0$$

$$(r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$$

Untuk mendapatkan nilai  $r_1, r_2$  digunakan rumus  $abc$  dimana  $a = 1, b = 0$ , dan  $c = -1$

$$(r^2 - 1) = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$r_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4}}{2}$$

$$r_{1,2} = \pm 1$$

Untuk mendapatkan nilai  $r_3, r_4$  digunakan rumus  $abc$  dimana  $a=1, b=0$ , dan  $c=1$

$$(r^2 + 1) = 0$$

$$r_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_{3,4} = \frac{\pm \sqrt{-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$r_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2}$$

$$r_{1,2} = \pm i(1)$$

$$r_{1,2} = \pm i$$

Sebab  $D = b^2 - 4ac$  maka persamaan  $r^4 - 1 = 0$  atau  $(r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$ . Untuk persamaan  $(r^2 - 1)$  dengan  $a=1, b=0$  dan  $c=-1$  dapat diperoleh  $D = (0)^2 - 4(1)(-1) = 4$  dan untuk persamaan  $(r^2 + 1)$  dengan  $a=1, b=0$  dan  $c=1$  dapat diperoleh  $D = (0)^2 - 4(1)(1) = -4$ , sehingga  $D < 0$  maka  $r_1, r_2, r_3, r_4$  merupakan bilangan kompleks atau imajiner, sehingga dapat diperoleh  $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = i$  dan  $r_4 = -i$

Jadi solusi umumnya adalah  $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

c. Bila  $D = 0$  maka  $r_1 = r_2$  (akar real dan sama)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar yang sama, maka solusi umumnya tidak lagi mempunyai bentuk seperti Persamaan (2.5), tetapi mempunyai bentuk berikut :  $e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{r_1 x}$ . Jika akar-akarnya berulang sebanyak  $s$  kali ( $s \leq n$ ), maka solusi umum Persamaan (2.5) adalah

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + \dots + c_n x^{s-1} e^{r_1 x} \quad (2.7)$$

Jika akar-akar kompleks berulang sebanyak  $s$  kali,<sup>16</sup> maka solusi umumnya adalah:

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x + c_3 x e^{\lambda x} \cos \mu x + c_4 x e^{\lambda x} \sin \mu x + \dots + c_n x^{s-1} e^{\lambda x} \cos \mu x + c_{n+1} x^{s-1} e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (2.8)$$

### Contoh 2.8 :

Tentukan solusi umum persamaan diferensial :  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .

Jawab :

Misalkan  $y = e^{rx}$  maka dapat disubsitusikan ke persamaan diferensial homogen sebagai berikut :

$$\begin{aligned} (e^{rx})'' + 4(e^{rx})' + 4(e^{rx}) &= 0 \\ e^{rx}(r^2 + 4r + 4) &= 0 \end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana  $a = 1, b = 4$  dan  $c = 4$  sehingga

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

---

<sup>16</sup> Heris Herdiana. *Persamaan Diferensial*. Bandung:Pustaka.2011, h.154-157

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} \\
&= \frac{4 \pm 0}{2}
\end{aligned}$$

Sebab  $D = b^2 - 4ac$  maka persamaan  $r^2 + 4r + 4 = 0$  dengan  $a = 1, b = 4$  dan  $c = 4$  dapat diperoleh  $D = (4)^2 - 4(1)(4) = 0$ , sehingga  $D = 0$  maka  $r_1 = r_2$  merupakan akar real dan sama, sehingga dapat diperoleh  $r_1 = \frac{4}{2}$  dan  $r_2 = \frac{4}{2}$ , atau

$r_1 = 2$  dan  $r_2 = 2$ .

Jadi solusi umumnya adalah :  $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ .

#### D. Bebas Linear dan Determinan Wronski

##### Definisi 2.6 :

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  dikatakan tidak bebas linear (*linear independent*) jika terdapat konstanta-konstanta  $k_1, k_2, \dots, k_n$  yang tidak semuanya nol sehingga  $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) = 0$ . Jika bukan kasus tersebut, maka fungsi-fungsi tersebut dikatakan bebas linear (*linear dependent*).<sup>17</sup>

##### Definisi 2.7 :

Wronskian dari  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  yang bersifat bahwa setiap fungsi mempunyai derivatif sampai tingkat ke- $(n-1)$ ,<sup>18</sup> adalah

---

<sup>17</sup> Didit Budi Nugroho, *M.Si. Persamaan Diferensial Biasa*. (Universitas Kristen Satya Wacana, 2009), h. 48-49

<sup>18</sup> Ibid

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

### Contoh 2.9 :

Tentukan Wronskian dari fungsi-fungsi berikut :

- $y_1(x) = \sin 3x, y_2(x) = \cos 3x$
- $y_1(x) = x, y_2(x) = x^2, y_3(x) = x^3$

Penyelesaian :

Dari definisi 2 dan fungsi-fungsi yang diketahui, kita hitung

$$\begin{aligned} \text{a. } W(\sin 3x, \cos 3x; x) &= \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{vmatrix} \\ &= -3\sin^2 3x - 3\cos^2 3x \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } W(x, x^2, x^3; x) &= \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} \\ &= (12x^3 + 0 + 2x^3) - (0 + 6x^3 + 6x^3) \\ &= 14x^3 - 12x^3 \\ &= 2x^3 \end{aligned}$$

### E. Metode Variasi Parameter

Metode yang lebih umum daripada metode koefisien tak tentu adalah metode variasi parameter.<sup>19</sup> Variasi parameter merupakan metode lain untuk

---

<sup>19</sup>Edwin J, *Kalkulus dan Geometri Analitis*. (Jakarta:Penerbit Erlangga.1987), h.449

menemukan suatu integral khusus dari persamaan diferensial linear tak homogen orde- $n$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.10)$$

Jika  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  adalah  $n$  penyelesaian dari persamaan homogen :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2.11)$$

maka suatu integral khusus untuk Persamaan (2.10) mempunyai bentuk

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \cdots + v_n(x)y_n(x) \quad (2.12)$$

dengan  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$  adalah fungsi-fungsi tak diketahui yang harus ditentukan.

Untuk mencari  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ , pertama kali diselesaikan sistem

persamaan linear berikut ini untuk  $v_1'(x), v_2'(x), \dots, v_n'(x)$ :

$$\begin{aligned} v_1' y_1 + v_2' y_2 + \cdots + v_n' y_n &= 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' + \cdots + v_n' y_n' &= 0 \\ \vdots & \\ v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\ v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} &= f(x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Selanjutnya diintegrasikan setiap  $v_i'$  untuk memperoleh  $v_i$  dengan mengabaikan semua konstanta integrasi. Hal ini diperbolehkan sebab hanya akan dilihat satu integral khusus. Metode di atas dikenal dengan nama metode variasi parameter. Di sini hanya akan dibuktikan untuk persamaan diferensial tingkat dua yaitu bahwa



Persamaan (2.13) akan memberikan suatu integral khusus untuk Persamaan diferensial (2.10).<sup>20</sup> Diasumsikan suatu integral khususnya berbentuk

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

Dibentuk sistem persamaan

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

Selanjutnya ditentukan

$$\begin{aligned} y_p' &= v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x) + v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) \\ &= v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} y_p'' &= v_1(x)y_1''(x) + v_2(x)y_2''(x) + v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) \\ &= v_1(x)y_1''(x) + v_2(x)y_2''(x) + f(x) \end{aligned}$$

Disubstitusikan  $y_p(x)$ ,  $y_p'(x)$ , dan  $y_p''(x)$  ke Persamaan (2.10) diperoleh

$$\begin{aligned} y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p &= (v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + f) + a_1 (v_1 y_1' + v_2 y_2') + a_0 (v_1 y_1 + v_2 y_2) \\ &= v_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + v_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

### Contoh 2.10 :

Gunakan metode variasi parameter untuk mencari integral khusus untuk persamaan  $y'' + 4y = \sin^2(2x)$  dan selanjutnya tuliskan penyelesaian lengkapnya.

Jawab :

---

<sup>20</sup> Didit Budi Nugroho. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*. Yogyakarta: Graha Ilmu. h.120-121

Penyelesaian homogenya yaitu  $y_h(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$ . Diasumsikan

bahwa integral khususnya berbentuk

$$y_p = v_1 \cos(2x) + v_2 \sin(2x)$$

Selanjutnya dari sistem persamaan (2.10), dipunyai

$$v_1' \cos(2x) + v_2' \sin(2x) = 0$$

$$v_1' [-2 \sin(2x)] + v_2' [2 \cos(2x)] = \sin^2(2x)$$

Penyelesaian dari sistem persamaan di atas yaitu

$$v_1' = -\frac{1}{2} \sin^3(2x)$$

$$v_2' = -\frac{1}{2} \sin^2(2x) \cos(2x)$$

Jadi

$$v_1 = -\frac{1}{2} \int \sin^3(2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{12} \cos^3(2x)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \int \sin^2(2x) \cos(2x) dx$$

$$= \frac{1}{12} \cos^3(2x)$$

Karena itu integral khususnya yaitu

$$y_p = v_1 \cos(2x) + v_2 \sin(2x)$$

$$y_p = \left[ \frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{12} \cos^3(2x) \right] \cos(2x) + \left[ \frac{1}{12} \sin^3(2x) \right] \sin(2x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cos^2(2x) - \frac{1}{12} \cos^4(2x) + \frac{1}{12} \sin^4(2x) \\
&= \frac{1}{12} \cos^2(2x) + \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Jadi penyelesaian lengkap untuk Persamaan Diferensial yaitu

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{12} \cos^2(2x) + \frac{1}{12}$$

## F. Aturan Cramer

### Teorema 2.1 :

Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$  yang dapat dibalik, maka untuk setiap matriks  $B$  yang berukuran  $n \times 1$ , sistem persamaan  $AX = B$  mempunyai persis satu pemecahan, yakni

$$X = A^{-1}B \quad (2.14)$$

Bukti :

Karena  $A(A^{-1}B) = B$ , maka  $X = A^{-1}B$  adalah pemecahan  $AX = B$ . Untuk memperlihatkan bahwa ini adalah satu-satunya pemecahan, maka dapat menganggap bahwa  $X_0$  adalah sebarang pemecahan dan kemudian memperlihatkan bahwa  $X_0$  harus merupakan pemecahan  $A^{-1}B$ .

Jika  $X_0$  adalah suatu pemecahan, maka  $AX_0 = B$ . Dengan mengalikan kedua ruas dengan  $A^{-1}$ , maka didapatkan  $X_0 = A^{-1}B$

### Teorema 2.2 :

Jika  $A$  adalah matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad (2.15)$$

Bukti :

Mula-mula diperlihatkan bahwa

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A)I$$

Tinjaulah hasil kali

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{j1} & \cdots & c_{n1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{j2} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{jn} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri dalam baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari  $A \operatorname{adj}(A)$  adalah

$$a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + \cdots + a_{in}c_{jn} \quad (2.16)$$

Jika  $i = j$ , maka Persamaan (2.16) adalah ekspansi kofaktor dari  $\det(A)$  sepanjang baris ke- $i$  dari  $A$ . Sebaliknya, jika  $i \neq j$ , maka koefisien-koefisien  $a$  dan kofaktor-kofaktor berasal dari baris-baris  $A$  yang berbeda, sehingga nilai dari Persamaan (2.16) sama dengan nol. Maka,

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I \quad (2.17)$$

Karena  $A$  dapat dibalik, maka  $\det(A) \neq 0$ . Selanjutnya, persamaan (2.17) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\frac{1}{\det(A)} [A \operatorname{adj}(A)] = I$$

atau

$$A \left[ \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right] = I$$

Dengan mengalikan kedua ruas dari kiri dengan  $A^{-1}$  akan menghasilkan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad (2.18)$$

**Teorema 2.3 :**

Jika  $AX = B$  adalah sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan linear dalam  $n$  bilangan tak diketahui sehingga  $\det(A) \neq 0$ , maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang unik.<sup>21</sup> Pemecahan ini adalah:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

di mana  $A_j$  adalah matriks yang didapatkan dengan menggantikan elemen-elemen dalam kolom ke- $j$  dari  $A$  dengan elemen-elemen dalam matriks

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bukti :

Jika  $\det(A) \neq 0$ , maka  $A$  dapat dibalik dan menurut Teorema 2.1 yaitu  $X = A^{-1} B$  adalah pemecahan unik dari  $AX = B$ . Sehingga, menurut Teorema 2.2 diperoleh

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} B \\ &= \frac{1}{\det(A)} (\text{adj } A) B \end{aligned}$$

---

<sup>21</sup> Kusumawati, Ririen. *Aljabar Linear & Matriks*. Surabaya : UIN-Malang Press, 2009. hal.79-88

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan matriks-matriks ini akan memberikan

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \cdots + b_n C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri dalam baris ke- $j$  dari  $X$  dengan demikian adalah

$$X_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}}{\det(A)}$$

dimisalkan

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Karena  $A_j$  berbeda dari  $A$  hanya dalam kolom ke- $j$ , maka kofaktor dari entri-entri

$b_1, b_2, \dots, b_n$  dan  $A_j$  adalah sama seperti kofaktor dari entri-entri yang bersesuaian

dalam kolom ke- $j$  dari  $A$ . Perluasan kofaktor  $\det(A_j)$  sepanjang kolom ke- $j$

dengan demikian adalah

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}$$

Dengan mensubstitusikan hasil ini ke dalam

$$X_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}}{\det(A)}$$

maka akan memberikan

$$X_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad (2.19)$$

**Contoh 2.11 :**

Gunakan aturan Cramer untuk memecahkan :

$$\begin{aligned} x_1 + \quad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{74}{44} = \frac{18}{11}$$

**G. Fungsi Green**

Pandang persamaan diferensial linear tak homogen orde- $n$  :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.20)$$

Dengan fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi yang kontinu. Fungsi  $G(x,t)$  dikatakan fungsi *green* untuk masalah nilai awal persamaan diferensial di atas jika memenuhi kondisi sebagai berikut :

a.  $G(x,t)$  terdefinisi pada daerah  $R = I \times I$  dari semua titik  $(x,t)$  dengan  $x$  dan  $t$  terletak dalam selang  $I$ .

b.  $G(x,t), \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n G}{\partial x^n}$  merupakan fungsi yang kontinu pada  $R = I \times I$ .

c. Untuk setiap  $x_0$  dalam selang  $I$ , fungsi  $y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x,t) h(t) dt(x)$  adalah

solusi persamaan diferensial tersebut memenuhi kondisi awal

$$y_p(x_0) = y_p'(x_0) = y_p''(x_0) = \dots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0.^{22}$$

## H. Integral Parsial

Jika  $u$  dan  $v$  adalah fungsi, aturan perkaliannya menghasilkan

$$D_x(uv) = uv' + vu'$$

yang dapat ditulis kembali dalam istilah antiturunan sebagai berikut :

$$uv = \int uv' dx + \int vu' dx$$

Sekarang,  $\int uv' dx$  dapat ditulis sebagai  $\int u dv$  dan  $\int vu' dx$  dapat ditulis sebagai

$\int v du$ . Jadi,  $uv = \int u dv + \int v du$ , dan karena itu,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{integrasi parsial})$$

---

<sup>22</sup> Iwan Sugiarto, 2002. *Mengkonstruksi Fungsi Green Persamaan diferensial Linear Orde-n*. Jurnal Integral: Universitas Parahyangan Bandung



Tujuan integrasi parsial adalah untuk menggantikan integrasi yang “sulit”  $\int u \, dv$  dengan integrasi yang “mudah”  $\int v \, du$ .<sup>23</sup>

**Contoh 2.12 :** Tentukan  $\int x \ln x \, dx$ .

Untuk menggunakan rumus integrasi integral parsial, terlebih dahulu harus membagi integran  $x \ln x \, dx$  menjadi dua “bagian”  $u$  dan  $dv$  sehingga dapat dengan mudah menentukan  $v$  dengan integrasi dan juga dengan mudah menentukan  $\int v \, du$ . Dalam contoh ini, dimisalkan  $u = \ln x$  dan  $dv = x \, dx$ .

Kemudian dapat menetapkan  $v = \frac{1}{2}x^2$  dan catatan bahwa  $du = \frac{1}{x}dx$ . Jadi, rumus integrasi parsial menghasilkan :

$$\begin{aligned}
 u &= \ln x & dv &= x \, dx \\
 du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{1}{2} x^2 \\
 \int x \ln x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du \\
 &= (\ln x) \left( \frac{1}{2} x^2 \right) - \int \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \\
 &= \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) + C
 \end{aligned}$$

---

<sup>23</sup> Frank Ayres, JR. *Kalkulus Edisi Empat*. (Jakarta: Penerbit Erlangga. 1999), h. 178-179

Pada baris pertama, ditempatkan  $u$  dan  $dv$ . Pada baris kedua, ditempatkan  $u$  dan  $dv$ . Hasil yang dikehendaki dari rumus integral parsial  $uv - \int v du$  dapat diperoleh dengan pertama-tama mengalikan sudut kiri atas  $u$  dengan sudut kanan bawah  $v$ , dan kemudian mengurangkan integral perkalian  $v du$  dari dua masukan  $v$  dan  $du$  pada baris kedua.

**Contoh 2.13 :** Tentukan  $\int xe^x dx$ .

Misalkan  $u = x$  dan  $dv = e^x dx$ . Dapat menggambarannya di bawah ini :

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

Maka,

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= uv - \int v du \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^x(x-1) + C \end{aligned}$$

## I. Masalah Nilai Awal

Untuk menentukan solusi tunggal dari persamaan diferensial orde pertama cukup dengan memberikan suatu nilai dari solusi pada sebuah titik. Karena solusi umum persamaan orde kedua memuat dua konstanta sembarang maka cukup menspesifikasikan dua kondisi atau syarat yang dinamakan kondisi atau syarat awal, yaitu  $y(x_0) = k_0$  dan  $y'(x_0) = k_1$ . Disini  $x_0$  merupakan nilai  $x$  yang diberikan, sedangkan  $k_0$  dan  $k_1$  merupakan konstanta yang diberikan. Jadi

untuk menentukan solusi tunggal dari persamaan orde kedua adalah cukup menspesifikasikan sebuah titik yang berada pada kurva solusi dan kemiringan kurva pada sebuah titik.<sup>24</sup>

Jaminan eksistensi solusi tunggal dari persamaan orde kedua diberikan oleh teorema eksistensi dan ketunggalan solusi untuk persamaan diferensial orde kedua homogen maupun tak homogen yang menyatakan bahwa misalkan  $r(x)$  kontinu pada interval buka  $\alpha < x < \beta$  maka terdapat satu dan hanya satu fungsi  $y = y(x)$  yang memenuhi persamaan diferensial,

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

dengan kondisi awal

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_0' \quad (2.21)$$

yang tertentu pada titik  $x_0$  dalam interval itu.

Jadi dalam teorema eksistensi dan ketunggalan ini, kondisi awal yang menentukan solusi tunggal merupakan kondisi – kondisi pada nilai dari solusi turunannya pada titik tunggal  $x_0$  dalam interval itu.<sup>25</sup>

**Contoh 2.14 :** Selesaikan masalah nilai awal

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Yang memenuhi kondisi awal  $y(0) = 1$  dan  $y'(0) = -3$

Jawab :

Solusi umum persamaan diferensial ini adalah

---

<sup>24</sup> Kartono, 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Graha Ilmu :Yogyakarta. h.65-66

<sup>25</sup> Ibid

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Maka

$$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$$

Dengan mensubsitusikan kedua kondisi awal pada kedua persamaan ini maka diperoleh :

$$1 = c_1 + c_2 \text{ dan } -3 = -c_1 - 2c_2$$

Dari sini,  $c_2 = 2$  dan  $c_1 = -1$

Jadi solusi khusus yang memenuhi kondisi – kondisi awal itu adalah

$$y = -e^{-x} + 2e^{-2x}$$

Hanya berlaku ketika kondisi awalnya  $y(0) = 1$  dan  $y'(0) = -3$ . Dapat ditunjukkan bahwa akan didapatkan solusi yang berbeda jika kondisi awalnya berbeda.

#### **J. Tinjauan dalam Bidang Fisika (*Vibrasi Sistem Mekanis*)**

*Vibrasi /Getaran* adalah gerakan bolak-balik dalam suatu interval waktu tertentu. Getaran berhubungan dengan gerak osilasi benda dan gaya yang berhubungan dengan gerak tersebut. Semua benda yang mempunyai massa dan elastisitas mampu bergetar, jadi kebanyakan mesin mengalami getaran sampai derajat tertentu dan rancangannya biasanya memerlukan pertimbangan sifat osilasinya. Ada dua kelompok getaran yang umum yaitu :

##### **a. Getaran Bebas**

*Getaran* bebas terjadi jika sistem berosilasi karena bekerjanya gaya yang ada dalam sistem itu sendiri, dan jika ada gaya luar yang bekerja. Sistem yang bergetar bebas akan bergerak pada satu atau lebih frekuensi naturalnya, yang

merupakan sifat sistem dinamika yang dibentuk oleh distribusi massa dan kekuatannya. Semua sistem yang memiliki massa dan elastisitas dapat mengalami getaran bebas atau getaran yang terjadi tanpa rangsangan luar.

b. Getaran Paksa

*Getaran* paksa adalah getaran yang terjadi karena rangsangan gaya luar, jika rangsangan tersebut berosilasi maka sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan. Jika frekuensi rangsangan sama dengan salah satu frekuensi natural sistem, maka akan didapat keadaan resonansi dan osilasi besar yang berbahaya mungkin terjadi. Jadi perhitungan frekuensi natural merupakan hal yang utama.

*Vibrasi atau getaran* mempunyai tiga parameter yang dapat dijadikan sebagai tolak ukur yaitu :

- *Amplitudo*

*Amplitudo* adalah ukuran atau besarnya sinyal vibrasi yang dihasilkan. Makin tinggi amplitudo yang ditunjukkan menunjukkan makin besar gangguan yang terjadi. Besarnya amplitudo tergantung pada tipe mesin yang ada.

- *Frekuensi*

*Frekuensi* adalah banyaknya periode getaran yang terjadi dalam satu putaran waktu. Besarnya frekuensi yang timbul saat terjadinya vibrasi dapat mengindikasikan jenis-jenis gangguan yang terjadi.

- *Phase Vibrasi*

*Phase* adalah penggambaran akhir dari pada karakteristik suatu getaran atau vibrasi yang terjadi pada suatu mesin. Phase adalah perpindahan atau

perubahan posisi pada bagian-bagian yang bergetar secara relatif untuk menentukan titik referensi atau titik awal pada bagian lain yang bergetar.<sup>26</sup>

Misalkan suatu pegas menahan tekanan dan pemanjangan digantungkannya secara vertikal pada suatu titik tetap. Di ujung bawah pegas itu diikatkan suatu benda bermassa  $m$  dengan asumsi bahwa  $m$  sedemikian besar sehingga massa pegas dapat diabaikan. Jika benda itu ditarik ke bawah (disebut sebagai arah positif) secara vertikal pada jarak tertentu dan kemudian dilepaskannya maka benda itu bergerak secara vertikal (naik turun). Untuk menentukan persamaan gerak sistem mekanis tersebut, perlu diperhatikan semua gaya yang bekerja pada benda itu selama pergerakannya, yaitu

1. Gaya gravitasi ( $F_g$ )

$$F_g = m \cdot g$$

Dimana  $m$  merupakan massa benda dan  $g$  adalah percepatan gravitasi ( $980 \text{ cm/det}^2$ ).

2. Gaya pegas pada benda ( $F_p$ )

Hasil percobaan menunjukkan bahwa di dalam batas-batas yang layak, besar gaya itu sebanding dengan perubahan panjang pegas. Arah gaya itu ke atas jika pegas ditarik dan ke bawah jika pegas itu ditekan. Menurut hukum Hooke maka

$$F_p = -k \cdot s$$

dimana  $k$  adalah konstanta kesebandingan disebut sebagai modulus pegas,  $s$  adalah jarak pergeseran vertikal dari benda. Jika  $s$  positif (pegas ditarik) maka  $F_p$

---

<sup>26</sup> Dr. Abdul Hamid, B.Eng, M.Eng, 2012. *Prakikal Vibrasi Mekanik Teori dan Praktik*. Yogyakarta: Graha Ilmu. h.1-3

menjadi negatif (arah ke atas) tetapi jika  $s$  negatif (pegas ditekan) maka  $F_p$  menjadi positif (arah ke bawah).

Dalam keadaan tidak bergerak (diam) maka gaya gravitasi dan gaya pegas dalam keadaan setimbang dan oleh karena itu resultan gayanya adalah nol,

$$F_g + F_p = m.g - k.s_o = 0$$

dimana  $s_o$  adalah perubahan panjang pegas pada saat benda dalam keadaan diam, yang disebut posisi kesetimbangan statis. Pergeseran benda diukur dari posisi kesetimbangan statis ( $y = 0$ ), dinotasikan dengan  $y = y(t)$ , dimana  $t$  adalah waktu.

### 3. Gaya gesek/penahan/peredam ( $F_r$ )

Gaya gesek pada kecepatan rendah diaproksimasi sebanding dengan kecepatan benda itu, yang berarti bahwa

$$F_r = -\delta \frac{dy}{dt} \text{ dengan } \delta > 0.$$

Konstanta  $\delta$  dinamakan konstanta peredam. Konstanta kesebandingan  $-\delta$ , negatif karena gaya gesek beraksi dalam arah yang berlawanan dengan gerak.

### 4. Gaya eksternal ( $F_e$ )

Diasumsikan bahwa gaya eksternal  $F_e$  bergantung hanya pada waktu ( $t$ ) dan tidak pada  $y$  dan  $y'$ , ditulis sebagai  $f(t)$ . Menurut hukum Newton, yaitu

$$\frac{d(mv)}{dt} = F_T$$

dimana  $m$  adalah massa,  $v$  adalah kecepatan,  $mv$  adalah momentum,  $t$  adalah waktu dan  $F_T$  adalah total gaya yang bekerja pada benda, maka dari sini diperoleh persamaan diferensial

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m.g - k(s_0 + y) - \delta \frac{dy}{dt} + f(t)$$

Tetapi karena

$$m.g - k.s_0 = 0$$

maka

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = f(t)$$

Catatan bahwa  $m$ ,  $\delta$  dan  $k$  adalah semuanya konstanta tak negatif. Kondisi awal yang biasa digunakan adalah posisi awal  $y(0)=0$ , dan kecepatan awal  $v(0)=y'(0)=0$ .

Misalkan tidak ada gaya luar selain gaya gravitasi, sehingga gaya luar  $f(t)=0$  maka mempunyai persamaan diferensial linear orde kedua homogen yaitu

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (2.22)$$

Solusi persamaan diferensial di atas dinamakan respon bebas (alami) dari sistem pegas massa. Untuk menganalisis lebih jauh tentang persamaan diferensial di atas tergantung ada peredam atau tidak pada sistem tersebut.<sup>27</sup>

**Kasus 1** : Tidak ada peredam dalam sistem.

Misalkan tidak ada peredam ( $\delta=0$ ) dalam sistem (2.16) sehingga respon bebas diberikan oleh persamaan diferensial

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$$

---

<sup>27</sup> Kartono, 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Graha Ilmu :Yogyakarta. h.84-86



Sesuai metode penyelesaian persamaan diferensial linear orde kedua homogen, persamaan karakteristiknya adalah

$$m\lambda^2 + k = 0$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik ini adalah

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

$$= \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{karena } m > 0, k > 0$$

Jadi solusi persamaan diferensial tanpa redaman itu adalah

$$y = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{dimana } \sin \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

solusi ini menggambarkan respon bebas yang dihasilkan, yang disebut gerak

harmonik sederhana (yang diberikan oleh fungsi *sinus*) dengan periode  $\frac{2\pi}{\omega}$  dan

frekuensi sebesar  $\frac{\omega}{2\pi}$ , dimana variabel  $\phi$  dinamakan sudut *phase* dan  $\sqrt{A^2 + B^2}$

adalah amplitudonya.<sup>28</sup>

---

<sup>28</sup> Ibid

**Kasus 2 :** Terdapat peredam dalam sistem ( $\delta > 0$ ).

Misalkan adanya peredam tidak dapat diabaikan maka dinamika sistem pegas massa dijelaskan oleh persamaan diferensial

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial ini adalah

$$m\lambda^2 + \delta\lambda + k = 0$$

dan mempunyai akar-akar dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana  $a = m, b = \delta$

dan  $c = k$ .

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4(m)(k)}}{2m} \\ &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned}$$

Dengan demikian ada tiga jenis akar bergantung pada apakah  $\delta^2 - 4mk$  adalah negatif, nol atau positif. Untuk pembahasan setiap kasus jenis akar ini, dapat diasumsikan bahwa massa  $m$  dan konstanta pegas  $k$  adalah tetap, sedangkan koefisien gesek  $\delta$  meningkat.

a. Sistem pegas kurang teredam  $0 < \delta < \sqrt{4mk}$

Dalam kasus ini,  $\delta^2 - 4mk$  adalah negatif, maka terdapat sepasang akar kompleks konjugat yaitu

$$\lambda = -a \pm bi.$$

dimana

$$a = \frac{\delta}{2m}, b = \frac{\sqrt{4mk - \delta^2}}{2m}$$

Maka solusi persamaan diferensial ini adalah

$$\begin{aligned} y &= e^{-at} (A \cos bt + B \sin bt) \\ &= e^{-at} \sqrt{A^2 + B^2} \sin(bt + \phi) \end{aligned}$$

Persamaan  $e^{-at} \sqrt{A^2 + B^2} \sin(bt + \phi)$  ini menggambarkan osilasi teredam. Untuk massa  $m$  dan konstanta pegas  $k$  yang diberikan, peningkatan resistensi (perlawanan)  $\delta$  (tetapi  $\delta < \sqrt{4mk}$ ) mempunyai dua efek yaitu osilasi akan teredam lebih cepat dan periode osilasi yang sedang diredam,  $\frac{2\pi}{b}$  meningkat.

b. Sistem pegas teredam kritis ( $\delta = \sqrt{4mk}$ ).

Dalam kasus ini terdapat akar kembar yaitu

$$\lambda = -\frac{\delta}{2m}$$

Sehingga solusi persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = (A + Bt)e^{\lambda t}$$

c. Sistem pegas terlalu teredam ( $\delta > \sqrt{4mk}$ ).

Dalam kasus ini, persamaan karakteristiknya mempunyai dua akar negatif yang berbeda

$$\begin{aligned} -r_1 &= -\frac{\delta}{2m} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m} \\ -r_2 &= -\frac{\delta}{2m} - \frac{\sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned}$$

Jadi solusi persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}.$$
<sup>29</sup>

---

<sup>29</sup> Ibid

### **BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

#### **A. Jenis Penelitian**

Penelitian yang digunakan oleh penulis adalah studi literatur (kepustakaan) yang bertujuan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat di ruang perpustakaan, dan ruang baca, seperti: buku-buku matematika dan buku-buku fisika, data materi persamaan diferensial yang berhubungan dengan fisika dari internet, jurnal dan lain - lain.

#### **B. Sumber Data**

Sumber data dalam penelitian ini yaitu buku-buku persamaan diferensial, buku-buku aljabar linear, buku-buku kalkulus, buku-buku matematika lain yang mendukung penelitian dan buku-buku fisika.

#### **C. Waktu dan Lokasi Penelitian**

Waktu yang digunakan dalam pelaksanaan penelitian ini adalah sekitar 4 bulan terhitung dari maret sampai dengan juni 2013 dan lokasi penelitian pada perpustakaan yang memiliki buku-buku yang berkaitan dengan persamaan diferensial dan metode-metode yang digunakan.

#### **D. Prosedur Penelitian**

Mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear dengan studi kasus vibrasi sistem mekanis. Untuk menjawab permasalahan yang ada digunakan teknik analisis dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Langkah-langkah mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear dengan menggunakan metode Variasi parameter sebagai berikut:

- a. Menentukan solusi persamaan diferensial homogen  $y_h(x)$ .
- b. Menentukan solusi khususnya atau variasi parameter  $y_p(x)$ .
- c. Menyelesaikan solusi khusus untuk menentukan  $v'_k(x)$  dengan aturan cramer.
- d. Menentukan  $v_k(x)$  dengan mengintegalkan  $v'_k(x)$  terhadap  $x$ .
- e. Mensubstitusi nilai  $v_k(x)$  dengan Persamaan (2.12) sehingga mendapatkan nilai fungsi *green*.

2. Langkah-langkah mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear dalam studi kasus yaitu vibrasi sistem mekanis dengan menggunakan metode Variasi parameter sebagai berikut:

- a. Menentukan model matematis atau bentuk persamaan diferensialnya
- b. Menentukan solusi persamaan diferensial homogen  $y_h(t)$ .
- c. Menentukan solusi khususnya atau variasi parameter  $y_p(x)$ .
- d. Menyelesaikan solusi khusus untuk menentukan  $v'_k(t)$  dengan aturan cramer.
- e. Menentukan  $v_k(t)$  dengan mengintegalkan  $v'_k(t)$  terhadap  $t$ .
- f. Mensubstitusi nilai  $v_k(x)$  dengan Persamaan (2.12) sehingga mendapatkan nilai fungsi *green*.

## BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

### A. Hasil Penelitian

#### 1. Mendapatkan fungsi green yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter.

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde- $n$  yaitu sebagai berikut :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.3)$$

Solusi umum persamaan diferensial di atas adalah :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

dimana  $y_h(x)$  merupakan solusi umum persamaan diferensial homogenya dan  $y_p(x)$  merupakan solusi khususnya atau variasi parameter.

Untuk menentukan solusi khususnya, maka digunakan cara mengkonstruksi fungsi *green*. Adapun langkah-langkah untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear dengan menggunakan metode variasi parameter yaitu sebagai berikut :

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde- $n$  diubah ke bentuk persamaan diferensial homogenya.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2.4)$$

Misalkan  $y = e^{rx}$  merupakan solusi persamaan diferensial homogen. Sehingga dimisalkan  $ay'' + by' + cy = 0$  dengan mensubstitusikan solusi tersebut dan turunannya ke dalam persamaan diferensial didapatkan :

$$a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Sebab  $e^{rx} \neq 0, \forall x \in \mathfrak{R}$ , maka  $ar^2 + br + c = 0$  disebut persamaan karakteristik dari persamaan diferensial. Akar persamaan karakteristik dari persamaan diferensial adalah :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & r_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} & \text{dan} & & & = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \end{aligned}$$

Kemungkinan nilai  $r_1$  dan  $r_2$  bergantung dari nilai  $D$ , yaitu :

- Bila  $D > 0$  maka  $r_1 \neq r_2$  (akar real dan berbeda)

Jika akar-akar persamaan karakteristik adalah real dan semuanya berbeda, maka solusi persamaan  $e^{r_1x}, e^{r_2x}, \dots, e^{r_nx}$  merupakan bilangan real dan berbeda,  $r_1 \neq r_2$ . Maka  $y_1(x) = e^{r_1x}$  dan  $y_2(x) = e^{r_2x}$

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x} + \dots + c_n e^{r_nx} \quad (2.5)$$

- Bila  $D < 0$  maka  $r_1, r_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks, maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Jika tidak ada akar yang sama, maka solusi umumnya adalah  $y_h = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x} + \dots + c_n e^{r_nx}$ . Sehingga solusi kompleks  $e^{(\lambda+i\mu)x}$  dan  $e^{(\lambda-i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi riilnya  $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$ . Jadi, solusi umum persamaan diferensial yang mempunyai akar-akar kompleks adalah



$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (2.6)$$

- Bila  $D = 0$  maka  $r_1 = r_2$  (akar real dan sama)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar yang sama, maka solusi umumnya tidak lagi mempunyai bentuk seperti Persamaan (2.5), tetapi mempunyai bentuk berikut :  $e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{r_1 x}$ . Jika akar-akarnya berulang sebanyak  $s$  kali ( $s \leq n$ ), maka solusi umum Persamaan (2.5) adalah

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + \dots + c_n x^{s-1} e^{r_1 x} \quad (2.7)$$

Jika akar-akar kompleks berulang sebanyak  $s$  kali, maka solusi umumnya adalah :

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x + c_3 x e^{\lambda x} \cos \mu x + c_4 x e^{\lambda x} \sin \mu x + \dots + c_n x^{s-1} e^{\lambda x} \cos \mu x + c_{n+1} x^{s-1} e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (2.8)$$

Untuk Persamaan (2.4) dimisalkan  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  merupakan solusi untuk persamaan diferensial homogenya maka  $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$  dengan  $c_1, c_2, \dots, c_n$  merupakan konstanta. Selanjutnya menentukan solusi khusus atau variasi parameter  $y_p(x)$  dengan suatu integral khusus mempunyai bentuk

$$y_p(x) = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) + \dots + v_n(x) y_n(x) \quad (2.12)$$

dengan  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$  adalah fungsi-fungsi tak diketahui yang harus ditentukan.

Untuk mencari  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ , pertama kali diselesaikan sistem persamaan linear berikut ini untuk  $v_1'(x), v_2'(x), \dots, v_n'(x)$ :

$$\begin{aligned}
v_1' y_1 + v_2' y_2 + \cdots + v_n' y_n &= 0 \\
v_1' y_1' + v_2' y_2' + \cdots + v_n' y_n' &= 0 \\
\vdots & \\
v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} &= \frac{f(x)}{a_0}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Sehingga nilai  $v_k'(x)$  dapat ditentukan dengan menggunakan aturan cramer.

Dimana menurut Teorema 2.3 di kajian teori yang memenuhi aturan cramer yang berbentuk matriks  $AX = B$  dimana :

$$A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_n^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(x)}{a_0} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix}$$

$AX = B$  adalah sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan linear dalam  $n$  bilangan tak diketahui sehingga  $\det(A) \neq 0$ , maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang unik. Pemecahan ini adalah :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_n^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{disebut juga determinan Wronski yang}$$

$W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$  dimana  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  merupakan selesaian bebas linear, maka  $W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] \neq 0$ . Sehingga syarat pada teorema tersebut terpenuhi. Jadi sistem tersebut mempunyai selesaian seperti :

$$v_k'(x) = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_{k-1}^{n-1} & \frac{f(x)}{a_0} & y_{k+1}^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_n^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

dengan  $k = 1, 2, \dots, n$

Misalkan pula  $v_k(x)$  merupakan determinan yang diperoleh dari

$$W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] \text{ dengan menggantikan kolom ke-} k \text{ dengan } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

jadi nilai  $v_k'$  dapat ditulis :

$$v_k'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_{k-1}^{n-1} & 1 & y_{k+1}^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} \cdot f(x)$$

$$\text{Misalkan nilai } v_k(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_{k-1}^{n-1} & 1 & y_{k+1}^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

dengan  $k = 1, 2, \dots, n$

sehingga

$$v_k'(x) = \frac{v_k(x) \cdot f(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]}$$

Setelah mendapatkan nilai  $v_k'(x)$  maka dapat ditentukan nilai  $v_k(x)$  dengan mengintegrasikan  $v_k'(x)$  terhadap  $x$  dengan batas atas  $x$  dan batas bawah  $x_0$ .

$$v_k = \int_{x_0}^x \frac{v_k(t) \cdot f(t)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} dt \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, n$$

Kemudian disubstitusi nilai  $v_k(x)$  dengan persamaan (2.12) sehingga diperoleh fungsi *green*  $G(x, t)$

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \dots + v_n(x)y_n(x)$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_{x_0}^x \frac{v_1(t) \cdot f(t)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} dt \cdot y_1(x) + \int_{x_0}^x \frac{v_2(t) \cdot f(t)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} dt \cdot y_2(x) + \dots + \\ &\quad \int_{x_0}^x \frac{v_n(t) \cdot f(t)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} dt \cdot y_n(x) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{v_1(t) \cdot y_1(x) + v_2(t) \cdot y_2(x) + \dots + v_n(t) \cdot y_n(x)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^x G(x, t) \cdot f(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{dengan } G(x, t) = \frac{v_1(t) \cdot y_1(x) + v_2(t) \cdot y_2(x) + \dots + v_n(t) \cdot y_n(x)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]}$$

**2. Mendapatkan fungsi green yang di kontruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter (studi kasus: vibrasi sistem mekanis).**

**Kasus 1 :** Tidak ada peredam dalam sistem.

Misalkan tidak ada peredam ( $\delta = 0$ ) dalam sistem (2.16) sehingga respon bebas diberikan oleh persamaan diferensial

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$$

Sesuai metode penyelesaian persamaan diferensial linear orde kedua homogen, persamaan karakteristiknya adalah

$$m\lambda^2 + k = 0$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik ini adalah

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

$$= \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{karena } m > 0, k > 0$$

Jadi solusi persamaan diferensial tanpa redaman itu adalah

$$y = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

**Contoh 1:**

Beban seberat 7 kg digantungkan pada pegas dengan modulus 36/35 kg/cm. Pada  $t = 0$  sementara bebas sedang menggantung dalam posisi setimbang, tiba-tiba

diberikan kecepatan awal sebesar  $48 \text{ cm/detik}$  dalam arah ke bawah. Dengan mengambil percepatan gravitasi  $g = 980 \text{ cm/detik}^2$ , hitunglah pergeseran vertikal dari beban itu sebagai fungsi dari waktu  $t$  ?

Penyelesaian :

Model matematis untuk sistem pegas ini diberikan oleh masalah nilai awal

$$\frac{7}{980} y'' + \frac{36}{35} y = 0$$

Berdasarkan uraian Persamaan (2.21) pada Bab II dapat dituliskan kondisi awal sebagai berikut :

$$y(0) = 0 \text{ (karena beban mulai bergerak dari posisi keseimbangannya),}$$

$$y'(0) = -48 \text{ (karena kecepatan awal dengan arah ke bawah).}$$

Persamaan diferensial homogenya :

$$\frac{7}{980} y'' + \frac{36}{35} y = 0$$

Misalkan  $y = e^{rx}$  maka disubsitusikan ke persamaan diferensial homogen sehingga:

$$\frac{7}{980} (e^{rx})'' + \frac{36}{35} (e^{rx})' = 0$$

$$e^{rx} \left( \frac{7}{980} r^2 + \frac{36}{35} r \right) = 0$$

dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana  $a = \frac{7}{980}$ ,  $b = 0$  dan  $c = \frac{36}{35}$  sehingga

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{(0)^2 - 4\left(\frac{7}{980}\right)\left(\frac{36}{35}\right)}}{2\left(\frac{7}{980}\right)}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{(0)^2 - 4\left(\frac{7}{980}\right)\left(\frac{36}{35}\right)}}{2\left(\frac{7}{980}\right)}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{-\frac{36}{1225}}}{\frac{1}{70}}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{36}{1225}}}{\frac{1}{70}}$$

$$= \frac{\pm i \frac{6}{35}}{\frac{1}{70}}$$

$$= \pm i 12$$

Karena  $r_1, r_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner) maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Sehingga solusi kompleks  $e^{(\lambda+i\mu)x}$  dan  $e^{(\lambda-i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi riilnya  $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$  Jadi, solusi umum persamaan diferensial yang mempunyai akar-akar kompleks adalah

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1 e^{(0)x} \cos(12t) + c_2 e^{(0)x} \sin(12t) \\ &= c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t) \end{aligned}$$

dengan :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos(12t) & y_1'(t) &= -\sin(12t) \\ y_2(t) &= \sin(12t) & y_2'(t) &= \cos(12t) \end{aligned}$$

digunakan bebas linear atau wronskian :

$$\begin{aligned} W[y_1(x), y_2(x)] &= \begin{vmatrix} \cos(12x) & \sin(12x) \\ -\sin(12x) & \cos(12x) \end{vmatrix} \\ &= \cos^2(12x) - (-\sin^2(12x)) \\ &= \cos^2(12x) + \sin^2(12x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

dengan menggunakan aturan cramer maka dapat dicari nilai  $v(x)$  :

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & \sin(12x) \\ 1 & \cos(12x) \end{vmatrix} \\ &= 0 - \sin(12x) \\ &= -\sin(12x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \begin{vmatrix} \cos(12x) & 0 \\ -\sin(12x) & 1 \end{vmatrix} \\ &= \cos(12x) - 0 \\ &= \cos(12x) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai fungsi *green* :

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]} \\ &= \frac{-\sin(12x) \cdot \cos(12t) + \cos(12x) \cdot \sin(12t)}{1} \\ &= (\sin(12t) \cos(12x)) - (\cos(12t) \sin(12x)) \end{aligned}$$



$$= \sin(12t - 12x)$$

Dengan mendapatkan nilai fungsi *green* sehingga dapat diselesaikan solusi khususnya atau variasi parameternya yaitu :

$$f(t) = 0$$

Jadi solusi khususnya :

$$\begin{aligned} y_p &= \int_{t_0}^t \sin(12t - 12x)(0) dx \\ &= 0 \int_{t_0}^t \sin(12t - 12x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga nilai  $y_p = 0$

jadi solusi umumnya :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

dimana,

$$y_h = c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t)$$

$$y_p = 0$$

$$y(t) = c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t) + 0$$

Untuk mencari nilai  $c_1$  dan  $c_2$ , maka digunakan nilai awal  $y(0) = 0$  dan

$$y'(0) = -48 \text{ yaitu :}$$

- Syarat awal  $y(0) = 0$

$$y(t) = c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t)$$

$$y(0) = c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t)$$

$$0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$

$$= c_1(1) + c_2(0)$$

jadi  $c_1 = 0$

- Syarat awal  $y'(0) = -48$

$$y'(t) = -12c_1 \sin(12t) + 12c_2 \cos(12t)$$

$$y'(0) = -12c_1 \sin(0) + 12c_2 \cos(0)$$

$$-48 = 12c_2$$

$$c_2 = -\frac{48}{12}$$

jadi  $c_2 = -4$

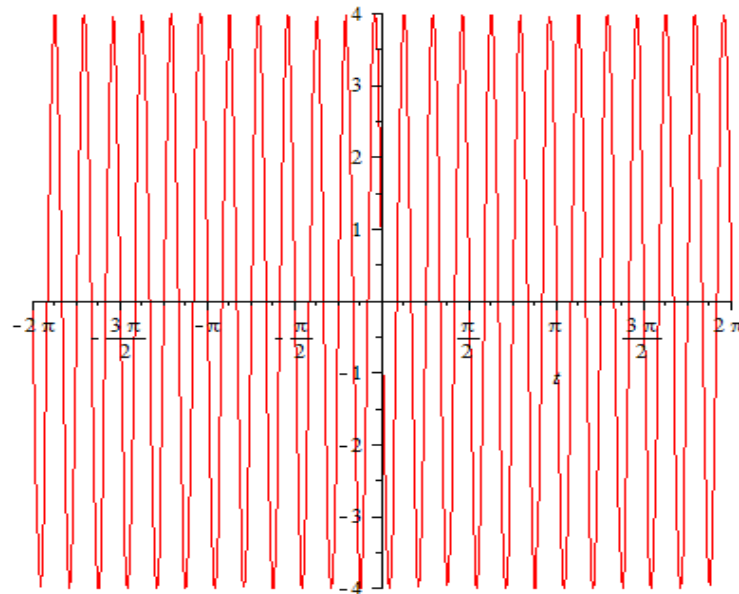
Jadi solusi umumnya adalah

$$y(t) = -4 \sin(12t)$$

Jadi solusi khusus untuk persamaan  $\frac{7}{980} y'' + \frac{36}{35} y = 0$  dengan syarat awal yang

digunakan  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = -48$  adalah  $y(t) = -4 \sin(12t)$

Amplitudo dari gerak harmonik ini adalah 4 cm, artinya bahwa beban berayun naik turun maksimal 4 cm di atas dan di bawah posisi keseimbangannya, yang dapat dilihat pada Gambar 4.1 berikut ini :



**Gambar 4.1 Gerak Harmonik**

**Kasus 2 :** Terdapat peredam dalam sistem ( $\delta > 0$ ).

Misalkan adanya peredam tidak dapat diabaikan maka dinamika sistem pegas massa dijelaskan oleh persamaan diferensial

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial ini adalah

$$m\lambda^2 + \delta\lambda + k = 0$$

dan mempunyai akar-akar dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana  $a = m, b = \delta$

dan  $c = k$ .

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4(m)(k)}}{2m} \\ &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned}$$

Dengan demikian ada tiga jenis akar bergantung pada apakah  $\delta^2 - 4mk$  adalah negatif, nol atau positif. Untuk pembahasan setiap kasus jenis akar ini, dapat diasumsikan bahwa massa  $m$  dan konstanta pegas  $k$  adalah tetap, sedangkan koefisien gesek)  $\delta$  meningkat.

a. Sistem pegas kurang teredam  $0 < \delta < \sqrt{4mk}$

Dalam kasus ini,  $\delta^2 - 4mk$  adalah negatif, maka terdapat sepasang akar kompleks konjugat yaitu

$$\lambda = -a \pm bi.$$

dimana

$$a = \frac{\delta}{2m}, b = \frac{\sqrt{4mk - \delta^2}}{2m}$$

Maka solusi persamaan diferensial ini adalah

$$\begin{aligned} y &= e^{-at} (A \cos bt + B \sin bt) \\ &= e^{-at} \sqrt{A^2 + B^2} \sin(bt + \phi) \end{aligned}$$

Bentuk  $e^{-at} \sqrt{A^2 + B^2} \sin(bt + \phi)$  ini menggambarkan osilasi teredam. Untuk massa  $m$  dan konstanta pegas  $k$  yang diberikan, peningkatan resistensi (perlawanan)  $\delta$  (tetapi  $\delta < \sqrt{4mk}$ ) mempunyai dua efek yaitu osilasi akan teredam lebih cepat dan periode osilasi yang sedang diredam,  $\frac{2\pi}{b}$  meningkat.

### Contoh 2:

Selesaikan masalah nilai awal yang memodelkan sistem pegas yang teredam

$$y'' + y' + 25,25y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 15$$

Penyelesaian :

Persamaan diferensial homogenya :

$$y'' + y' + 25,25y = 0$$

Misalkan  $y = e^{rx}$  maka disubsitusikan ke persamaan diferensial homogen sehingga:

$$(e^{rx})'' + (e^{rx})' + 25,25(1) = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + r + 25,25) = 0$$

dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana  $a = 1, b = 1$  dan  $c = 25,25$  sehingga

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(25,25)}}{2(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 101}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-100}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{100}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm i10}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm i5 \end{aligned}$$

Karena  $r_1, r_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner) maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Sehingga solusi kompleks  $e^{(\lambda+i\mu)x}$  dan

$e^{(\lambda-i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi realnya  $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$  Jadi, solusi umum persamaan diferensial yang mempunyai akar-akar kompleks adalah

$$y_h = c_1 e^{\frac{1}{2}t} \cos(5t) + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \sin(5t)$$

dengan :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\frac{1}{2}t} \cos(5t) & y_1'(t) &= \frac{5}{2} e^{\frac{1}{2}t} \sin(5t) \\ y_2(t) &= e^{\frac{1}{2}t} \sin(5t) & y_2'(t) &= -\frac{5}{2} e^{\frac{1}{2}t} \cos(5t) \end{aligned}$$

digunakan bebas linear atau wronskian :

$$\begin{aligned} W[y_1(x), y_2(x)] &= \begin{vmatrix} e^{\frac{1}{2}x} \cos(5x) & e^{\frac{1}{2}x} \sin(5x) \\ \frac{5}{2} e^{\frac{1}{2}x} \sin(5x) & -\frac{5}{2} e^{\frac{1}{2}x} \cos(5x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{5}{2} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right)^2 \sin^2(5x) - \left( -\frac{5}{2} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right)^2 \cos^2(5x) \right) \\ &= \frac{5}{2} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right)^2 \sin^2(5x) + \frac{5}{2} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right)^2 \cos^2(5x) \\ &= \frac{5}{2} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right)^2 (\sin^2(5x) + \cos^2(5x)) \\ &= \frac{5}{2} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right)^2 (1) \\ &= \frac{5}{2} \left( e^{\frac{1}{2}x} \right)^2 \end{aligned}$$

dengan menggunakan aturan cramer maka dapat dicari nilai  $v(x)$  :

$$v_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\frac{1}{2}x} \sin(5x) \\ 1 & -\frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \cos(5x) \end{vmatrix}$$

$$= 0 - e^{-\frac{1}{2}x} \sin(5x)$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}x} \sin(5x)$$

dan

$$v_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} \cos(5x) & 0 \\ \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \sin(5x) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x} \cos(5x) - 0$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x} \cos(5x)$$

Sehingga diperoleh nilai fungsi *green* :

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]} \\ &= \frac{-e^{-\frac{1}{2}x} \sin(5x) e^{-\frac{1}{2}t} \cos(5t) + e^{-\frac{1}{2}x} \cos(5x) e^{-\frac{1}{2}t} \sin(5t)}{\frac{5}{2} \left( e^{-\frac{1}{2}x} \right)^2} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{-e^{-\frac{1}{2}x} \sin(5x) e^{-\frac{1}{2}t} \cos(5t) + e^{-\frac{1}{2}x} \cos(5x) e^{-\frac{1}{2}t} \sin(5t)}{\left( e^{-\frac{1}{2}x} \right)^2} \end{aligned}$$

Dengan mendapatkan nilai fungsi *green* sehingga dapat diselesaikan solusi khususnya atau variasi parameternya yaitu :

$$f(x) = 0$$

Jadi solusi khususnya :

$$\begin{aligned} y_p &= \int_{t_0}^t \frac{2}{5} \cdot \frac{-e^{-\frac{1}{2}x} \sin(5x) e^{-\frac{1}{2}t} \cos(5t) + e^{-\frac{1}{2}x} \cos(5x) e^{-\frac{1}{2}t} \sin(5t)}{\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2} \cdot (0) dx \\ &= 0 \int_{t_0}^t \frac{2}{5} \cdot \frac{-e^{-\frac{1}{2}x} \sin(5x) e^{-\frac{1}{2}t} \cos(5t) + e^{-\frac{1}{2}x} \cos(5x) e^{-\frac{1}{2}t} \sin(5t)}{\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2} \cdot dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga nilai  $y_p = 0$

jadi solusi umumnya :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

dimana,

$$y_h = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos(5t) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin(5t)$$

$$y_p = 0$$

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos(5t) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin(5t) + 0$$

Untuk mencari nilai  $c_1$  dan  $c_2$ , maka digunakan nilai awal  $y(0) = 0$  dan

$$y'(0) = 15 \text{ yaitu:}$$

- Syarat awal  $y(0) = 0$

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos(5t) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin(5t)$$



$$y(0) = c_1 e^{-\frac{1}{2}(0)} \cos(5(0)) + c_2 e^{-\frac{1}{2}(0)} \sin(5(0))$$

$$0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$

$$= c_1(1) + c_2(0)$$

Jadi  $c_1 = 0$

- Syarat awal  $y'(0) = 15$

$$y'(x) = \frac{5}{2} c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \sin(5t) - \frac{5}{2} c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cos(5t)$$

$$y'(0) = \frac{5}{2} c_1 e^{-\frac{1}{2}(0)} \sin(5(0)) - \frac{5}{2} c_2 e^{-\frac{1}{2}(0)} \cos(5(0))$$

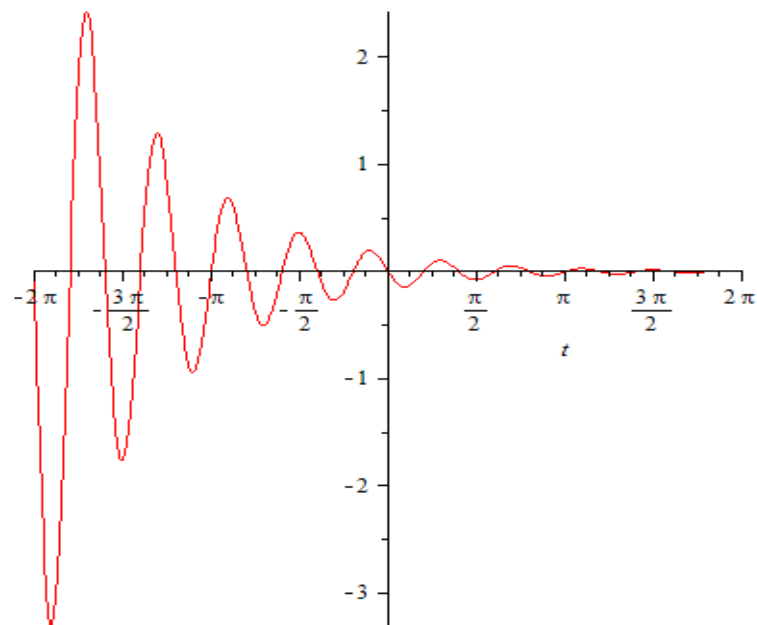
$$15 = -\frac{5}{2} c_2(1)$$

Jadi  $c_2 = -\frac{1}{6}$

Jadi solusi umumnya adalah

$$y(t) = -\frac{1}{6} e^{-\frac{1}{2}t} \sin(5t)$$

Untuk massa  $m$  dan konstanta pegas  $k$  yang diberikan, maka amplitudo dari gerak osilasi teredam menunjukkan bila redaman cukup kecil maka sistem masih bergetar namun pada akhirnya akan berhenti, yang dapat dilihat pada Gambar 4.2 berikut ini :



**Gambar 4.2 Osilasi Teredam**

- b. Sistem pegas teredam kritis ( $\delta = \sqrt{4mk}$ ).

Dalam kasus ini terdapat akar kembar yaitu

$$\lambda = -\frac{\delta}{2m}$$

Sehingga solusi persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = (A + Bt)e^{\lambda t}$$

**Contoh 3:**

Untuk menggambarkan ketergantungan gerakan (respon) pada koefisien peredam, gambarlah grafik empat solusi dari empat persamaan diferensial

$$y'' + \delta y' + 900y = 0$$

yang memenuhi kondisi awal  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  dengan  $\delta = 10$

penyelesaian :

Persamaan pertama dengan  $\delta = 10$

$$y'' + 10y' + 900y = 0$$

Sehingga persamaan diferensial homogenya :

$$y'' + 10y' + 900y = 0$$

Misalkan  $y = e^{rx}$  maka disubsitusikan ke persamaan diferensial homogen sehingga:

$$(e^{rx})'' + 10(e^{rx})' + 900(1) = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + 10r + 900) = 0$$

dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana  $a = 1, b = 10$  dan  $c = 900$  sehingga

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(1)(900)}}{2(1)} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 3600}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{-3500}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{-1} \cdot 10\sqrt{35}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm 10i\sqrt{35}}{2} \\ &= -5 \pm i 5\sqrt{35} \end{aligned}$$

Karena  $r_1, r_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner) maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Sehingga solusi kompleks  $e^{(\lambda+i\mu)x}$  dan

$e^{(\lambda-i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi realnya  $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$  Jadi, solusi umum

persamaan diferensial yang mempunyai akar-akar kompleks adalah

$$y_h = c_1 e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) + c_2 e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t)$$

dengan :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) & y_1'(t) &= 25\sqrt{35}e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t) \\ y_2(t) &= e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t) & y_2'(t) &= -25\sqrt{35}e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) \end{aligned}$$

digunakan bebas linear atau wronskian :

$$\begin{aligned} W[y_1(x), y_2(x)] &= \begin{vmatrix} e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x) & e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) \\ 25\sqrt{35}e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) & -25\sqrt{35}e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x) \end{vmatrix} \\ &= \left( 25(e^{-5x})^2 \sin(5\sqrt{35}x)^2 \sqrt{35} \right) - \left( -25(e^{-5x})^2 \cos(5\sqrt{35}x)^2 \sqrt{35} \right) \\ &= \left( 25(e^{-5x})^2 \sin(5\sqrt{35}x)^2 \sqrt{35} \right) + \left( 25(e^{-5x})^2 \cos(5\sqrt{35}x)^2 \sqrt{35} \right) \\ &= 25(e^{-5x})^2 \sqrt{35} (\sin^2(5\sqrt{35}x) + \cos^2(5\sqrt{35}x)) \\ &= 25(e^{-5x})^2 \sqrt{35} (1) \\ &= 25(e^{-5x})^2 \sqrt{35} \end{aligned}$$

dengan menggunakan aturan cramer maka dapat dicari nilai  $v(x)$  :

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) \\ 1 & -25\sqrt{35}e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x) \end{vmatrix} \\ &= 0 - e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) \\ &= -e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 v_2(x) &= \begin{vmatrix} e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x) & 0 \\ 25\sqrt{35}e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) & 1 \end{vmatrix} \\
 &= e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x) - 0 \\
 &= e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x)
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai fungsi *green* :

$$\begin{aligned}
 G(t, x) &= \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]} \\
 &= \frac{-e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) + e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x) e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t)}{25(e^{-5x})^2 \sqrt{35}} \\
 &= \frac{1}{875} \frac{(-e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) + e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x) e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t)) \sqrt{35}}{(e^{-5x})^2}
 \end{aligned}$$

Dengan mendapatkan nilai fungsi *green* sehingga dapat diselesaikan solusi khususnya atau variasi parameternya yaitu :

$$f(x) = 0$$

Jadi solusi khususnya :

$$\begin{aligned}
 y_p &= \int_{t_0}^t \frac{1}{875} \frac{(-e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) + e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x) e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t)) \sqrt{35}}{(e^{-5x})^2} \cdot (0) dx \\
 &= 0 \int_{t_0}^t \frac{1}{875} \frac{(-e^{-5x} \sin(5\sqrt{35}x) e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) + e^{-5x} \cos(5\sqrt{35}x) e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t)) \sqrt{35}}{(e^{-5x})^2} \cdot dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Sehingga nilai  $y_p = 0$

jadi solusi umumnya :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

dimana,

$$y_h = c_1 e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) + c_2 e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t)$$

$$y_p = 0$$

$$y(t) = c_1 e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) + c_2 e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t) + 0$$

Untuk mencari nilai  $c_1$  dan  $c_2$ , maka digunakan nilai awal  $y(0) = 1$  dan  $y'(0) = 0$

yaitu:

- Syarat awal  $y(0) = 1$

$$y(t) = c_1 e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t) + c_2 e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t)$$

$$y(0) = c_1 e^{-5(0)} \cos(5\sqrt{35}(0)) + c_2 e^{-5(0)} \sin(5\sqrt{35}(0))$$

$$1 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$

$$= c_1(1) + c_2(0)$$

jadi  $c_1 = 1$

- Syarat awal  $y'(0) = 0$

$$y'(x) = 25\sqrt{35}c_1 e^{-5t} \sin(5\sqrt{35}t) - 25\sqrt{35}c_2 e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t)$$

$$y'(0) = 25\sqrt{35}c_1 e^{-5(0)} \sin(5\sqrt{35}(0)) - 25\sqrt{35}c_2 e^{-5(0)} \cos(5\sqrt{35}(0))$$

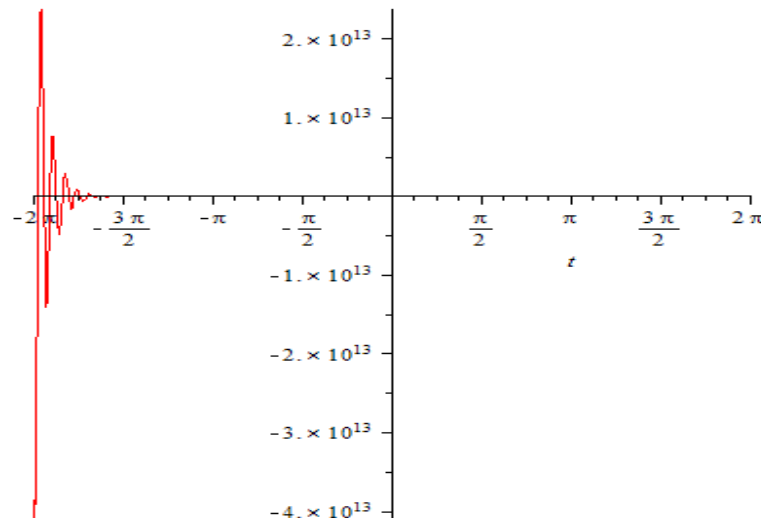
$$0 = -25\sqrt{35}c_2(1)$$

jadi  $c_2 = 0$

Jadi solusi umumnya adalah

$$y(t) = e^{-5t} \cos(5\sqrt{35}t)$$

Bentuk persamaan di atas merupakan gerak osilasi kritis atau disebut juga keadaan titik redaman kritis, dimana amplitudo dari gerak osilasi teredam ini menunjukkan redaman diperbesar sehingga mencapai titik saat sistem tidak lagi berosilasi, yang dapat dilihat pada Gambar 4.3 berikut ini :



**Gambar 4.3 Osilasi Teredam Kritis**

c. Sistem pegas terlalu teredam ( $\delta > \sqrt{4mk}$ ).

Dalam kasus ini, persamaan karakteristiknya mempunyai dua akar negatif yang berbeda

$$-r_1 = -\frac{\delta}{2m} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m}$$

$$-r_2 = -\frac{\delta}{2m} - \frac{\sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m}$$

Jadi solusi persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}$$

**Contoh 4:**

Untuk menggambarkan ketergantungan gerakan (respon) pada koefisien peredam, gambarlah grafik empat solusi dari empat persamaan diferensial

$$y'' + \delta y' + 900y = 0$$

yang memenuhi kondisi awal  $y(0)=1, y'(0)=0$  dengan  $\delta = 2$

Penyelesaian :

Persamaan pertama dengan  $\delta = 2$

$$y'' + 2y' + 900y = 0$$

Sehingga persamaan diferensial homogennya :

$$y'' + 2y' + 900y = 0$$

Misalkan  $y = e^{rx}$  maka disubsitusikan ke persamaan diferensial homogen sehingga:

$$(e^{rx})'' + 2(e^{rx})' + 900(1) = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + 2r + 900) = 0$$

dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana  $a = 1, b = 2$  dan  $c = 900$  sehingga

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(900)}}{2(1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 3600}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-3596}}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-1} 2\sqrt{899}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{899}}{2} \\
&= -1 \pm i\sqrt{899}
\end{aligned}$$

Karena  $r_1, r_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner) maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Sehingga solusi kompleks  $e^{(\lambda+i\mu)x}$  dan  $e^{(\lambda-i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi riilnya  $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$ . Jadi, solusi umum persamaan diferensial yang mempunyai akar-akar kompleks adalah

$$y_h = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{899}t)$$

dengan :

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) & y_1'(t) &= \sqrt{899} e^{-t} \sin(\sqrt{899}t) \\
y_2(t) &= e^{-t} \sin(\sqrt{899}t) & y_2'(t) &= -\sqrt{899} e^{-t} \cos(\sqrt{899}t)
\end{aligned}$$

digunakan bebas linear atau wronskian :

$$\begin{aligned}
W[y_1(x), y_2(x)] &= \begin{vmatrix} e^{-x} \cos(\sqrt{899}x) & e^{-x} \sin(\sqrt{899}x) \\ \sqrt{899} e^{-x} \sin(\sqrt{899}x) & -\sqrt{899} e^{-x} \cos(\sqrt{899}x) \end{vmatrix} \\
&= \left( (e^{-x})^2 \sin(\sqrt{899}x)^2 \sqrt{899} \right) - \left( - (e^{-x})^2 \cos(\sqrt{899}x)^2 \sqrt{899} \right) \\
&= \left( (e^{-x})^2 \sin(\sqrt{899}x)^2 \sqrt{899} \right) + \left( (e^{-x})^2 \cos(\sqrt{899}x)^2 \sqrt{899} \right) \\
&= (e^{-x})^2 \sqrt{899} (\sin^2(\sqrt{899}x) + \cos^2(\sqrt{899}x)) \\
&= (e^{-x})^2 \sqrt{899} (1) \\
&= (e^{-x})^2 \sqrt{899}
\end{aligned}$$

dengan menggunakan aturan cramer maka dapat dicari nilai  $v(x)$  :

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \sin(\sqrt{899}x) \\ 1 & -\sqrt{899}e^{-x} \cos(\sqrt{899}x) \end{vmatrix} \\ &= 0 - e^{-x} \sin(\sqrt{899}x) \\ &= -e^{-x} \sin(\sqrt{899}x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \begin{vmatrix} e^{-x} \cos(\sqrt{899}x) & 0 \\ \sqrt{899}e^{-x} \sin(\sqrt{899}x) & 1 \end{vmatrix} \\ &= e^{-x} \cos(\sqrt{899}x) - 0 \\ &= e^{-x} \cos(\sqrt{899}x) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai fungsi *green* :

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]} \\ &= \frac{-e^{-x} \sin(\sqrt{899}x) e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + e^{-x} \cos(\sqrt{899}x) e^{-t} \sin(\sqrt{899}t)}{(e^{-x})^2 \sqrt{899}} \\ &= \frac{1}{899} \frac{(-e^{-x} \sin(\sqrt{899}x) e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + e^{-x} \cos(\sqrt{899}x) e^{-t} \sin(\sqrt{899}t)) \sqrt{899}}{(e^{-x})^2 \sqrt{899}} \end{aligned}$$

Dengan mendapatkan nilai fungsi *green* sehingga dapat diselesaikan solusi khususnya atau variasi parameternya yaitu :

$$f(x) = 0$$

Jadi solusi khususnya :

$$\begin{aligned}
y_p &= \int_{t_0}^t \frac{1}{899} \frac{\left(-e^{-x} \sin(\sqrt{899}x)e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + e^{-x} \cos(\sqrt{899}x)e^{-t} \sin(\sqrt{899}t)\right)\sqrt{899}}{(e^{-x})^2 \sqrt{899}} \cdot (0) dx \\
&= 0 \int_{t_0}^t \frac{1}{899} \frac{\left(-e^{-x} \sin(\sqrt{899}x)e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + e^{-x} \cos(\sqrt{899}x)e^{-t} \sin(\sqrt{899}t)\right)\sqrt{899}}{(e^{-x})^2 \sqrt{899}} \cdot dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sehingga nilai  $y_p = 0$

jadi solusi umumnya :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

dimana,

$$y_h = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{899}t)$$

$$y_p = 0$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{899}t) + 0$$

Untuk mencari nilai  $c_1$  dan  $c_2$ , maka digunakan nilai awal  $y(0) = 1$  dan  $y'(0) = 0$

yaitu:

- Syarat awal  $y(0) = 1$

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{899}t)$$

$$y(0) = c_1 e^{-(0)} \cos(\sqrt{899}(0)) + c_2 e^{-(0)} \sin(\sqrt{899}(0))$$

$$1 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$

$$= c_1(1) + c_2(0)$$

Jadi  $c_1 = 1$

- Syarat awal  $y'(0) = 0$

$$y'(x) = \sqrt{899}c_1 e^{-t} \sin(\sqrt{899}t) - \sqrt{899}c_2 e^{-t} \cos(\sqrt{899}t)$$

$$y'(0) = \sqrt{899}c_1 e^{-(0)} \sin(\sqrt{899}(0)) - \sqrt{899}c_2 e^{-(0)} \cos(\sqrt{899}(0))$$

$$0 = \sqrt{899}c_2(1)$$

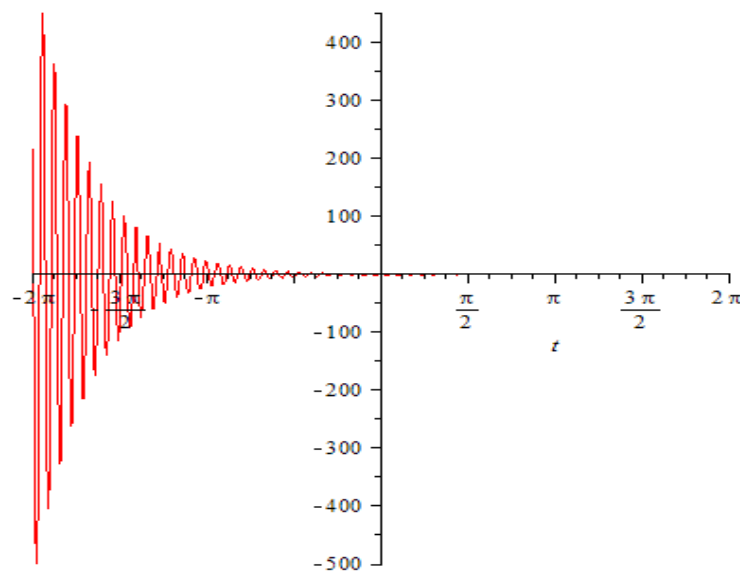
Jadi  $c_2 = 0$

Jadi solusi umumnya adalah

$$y(t) = e^{-t} \cos(\sqrt{899}t)$$

Amplitudo dari gerak osilasi teredam ini menunjukkan redaman ditambahkan melewati titik kritis disebut dalam keadaan lewat redam, yang dapat dilihat pada

Gambar 4.4 berikut ini :



**Gambar 4.4 Osilasi Terlalu Teredam**

## B. Pembahasan

Fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter sebagai berikut:

$$G(x, t) = \frac{v_1(t) \cdot y_1(x) + v_2(t) \cdot y_2(x) + \cdots + v_n(t) \cdot y_n(x)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} .$$

Fungsi  $G(x,t)$  dikatakan fungsi *green* untuk masalah nilai awal persamaan diferensial, dimana  $G(x,t)$  memenuhi kondisi ketiga pada kajian teori yaitu untuk

setiap  $x_0$  dalam selang  $I$ , fungsi  $y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x,t) h(t) dt$  adalah solusi persamaan

diferensial tersebut memenuhi kondisi awal

$$y_p(x_0) = y_p'(x_0) = y_p''(x_0) = \dots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter dalam bidang fisika yang studi kasusnya yaitu *vibrasi sistem mekanis*, sebenarnya hampir sama tanpa menggunakan studi kasus dalam fisika, yang membedakan hanya pada penyelesaian solusi umum studi kasus dalam fisika hanya sampai orde 2 dan terlebih dahulu harus menentukan model matematikanya, dapat dilihat sebagai berikut :

$$G(t, x) = \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]}.$$

Pada studi kasus *vibrasi sistem mekanis* terdapat dua kasus yaitu tidak ada peredam dalam sistem dan terdapat peredam dalam sistem, dimana jika terdapat peredam dalam sistem terbagi lagi tiga kasus diantaranya yaitu sistem pegas kurang teredam, sistem pegas teredam kritis, dan sistem pegas terlalu teredam. Sehingga dapat diasumsikan bahwa massa  $m$  dan konstanta pegas  $k$  adalag tetap, sedangkan koefisien gesek  $\delta$  meningkat. Namum dalam studi kasus *vibrasi sistem mekanis*, respon bebas dari sistem pegas massa (tidak ada gaya luar). Dapat terjadi jika terdapat gaya luar yang hanya bergantung pada waktu  $t$  dalam sistem pegas massa tersebut.

Pada Gambar 1 dapat disimpulkan bahwa amplitudo dari gerak harmonik ini adalah 4 *cm*, artinya bahwa beban berayun naik turun maksimal 4 *cm* di atas dan di bawah posisi keseimbangannya, sehingga gerak osilasi dapat berulang secara teratur atau dapat juga tidak teratur, jika gerak itu berulang dalam selang waktu yang sama maka gerak itu disebut gerak harmonik atau gerak periodik. Waktu pengulangan tersebut disebut perioda osilasi dan kebalikannya disebut frekuensi.

Pada Gambar 2 dapat disimpulkan bahwa amplitudo dari gerak osilasi teredam menunjukkan bila redaman cukup kecil. Sistem masih akan bergetar, namun pada akhirnya akan berhenti. Keadaan ini disebut kurang teredam dan merupakan kasus yang paling mendapatkan perhatiandalam analisis vibrasi.

Pada Gambar 3 dapat disimpulkan bahwa amplitudo dari gerak osilasi teredam menunjukkan bila redaman diperbesar sehingga mencapai titik saat sistem tidak lagi berosilasi, maka keadaan tersebut disebut keadaan titik redaman kritis.

Pada Gambar 4 dapat disimpulkan bahwa amplitudo dari gerak osilasi teredam menunjukkan bila redaman ditambahkan melewati titik kritis ini disebut dalam keadaan lewat redam.

## BAB V PENUTUP

### A. Kesimpulan

Berdasarkan uraian diatas dapat di simpulkan bahwa :

1. Untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter sebagai berikut:

$$G(x,t) = \frac{v_1(t) \cdot y_1(x) + v_2(t) \cdot y_2(x) + \dots + v_n(t) \cdot y_n(x)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} .$$

2. Untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter dalam bidang fisika yang studi kasusnya yaitu *vibrasi sistem mekanis*, sebenarnya hampir sama tanpa menggunakan studi kasus dalam fisika, yang membedakan hanya pada penyelesaian solusi umum studi kasus dalam fisika hanya sampai orde 2 dan terlebih dahulu harus menentukan model matematikanya, dapat dilihat sebagai berikut :

$$G(t,x) = \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]} .$$

### B. Saran

Masalah yang dibahas dalam tugas akhir ini masih berbentuk sederhana karena dalam fungsi *green* pada persamaan diferensial linear hanya terbatas pada pembahasan untuk menemukan nilai fungsi *green* dari suatu persamaan diferensial linear dengan menggunakan metode variasi parameter saja. Untuk itu perlu adanya pembahasan lebih lanjut, misalnya tentang aplikasi fisika pada masalah

lainnya seperti pada persamaan diferensial parsial melalui metode transformasi *Laplace* dengan menggunakan fungsi *Green*.



## DAFTAR PUSTAKA

- Alfi Fauzi, Fendi, *Persamaan Diferensial*, <http://pd-completed.pdf-Adobe.Reader/> diakses 7-12-2012.
- Amine Khamisi, Mohamed,  
<http://www.sosmath.com/differential/equation/byparts/byparts.htm> / diakses 2-1-2013
- Bronson, Richar, *Persamaan Diferensial Edisi Ketiga*, 2007, Jakarta: Penerbit Erlangga
- Budi Nugroho, Didit, 2009, *Persamaan Diferensial Biasa*, Universitas Kristen Satya Wacana
- Darmawijoyo, 2011. *Persamaan Diferensial Biasa : Suatu Pengantar*. Palembang:Penerbit Erlangga
- Departemen Agama RI, *Alqur'an dan Terjemahannya*, Jakarta: Lembaga Percetakan Al-Qur'an Raja Fahd dan Kementrian RI
- Frank Ayres, JR, 1999, *Kalkulus Edisi Empat*, Jakarta:Penerbit Erlangga
- Hanid, Abdul, 2012, *Pratikal Vibrasi Mekanis Teori dan Praktik* , Yogyakarta: Graha Ilmu
- Herdiana, Heris, 2011, *Persamaan Diferensial*, Bandung: Pustaka
- J, Edwin, 1987, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jakarta: Erlangga
- Kartono, 2012, *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*, Yogyakarta: Graha Ilmu
- Kusumawati, Ririen, 2009, *Aljabar Linear & Matriks*, Surabaya: UIN-Malang Press
- Mursita, Danang, 2011, *Matematika untuk Perguruan Tinggi*, Bandung: Rekayasa Sains
- R Spiegel, Murray, 1971, *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuan*, Bandung: Penerbit Erlangga

- Rahman, Abdul, 2007, *Persamaan Diferensial Biasa Teori dan Aplikasi*, Makassar: Tim Penulis
- Santoso, Widiarti, 1998, *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*, Jakarta: Erlangga
- Sudirham, Sudaryatno, *Integral dan Persamaan Diferensial*, <http://persamaan-diferensial-orde11.pdf-Adobe.Reader> / diakses 7-12-2012
- Sugiarto, Iwan, 2002, *Mengkonstruksi Fungsi Green Persamaan Diferensial Linear Orde- $n$* , Jurnal Integral: Universitas Parahyangan Bandung

# Mendapatkan Fungsi Green yang Dikonstruksi dari Persamaan Diferensial Linear dalam Bidang Fisika (Studi Kasus: Vibrasi Sistem Mekanis)

*Irwan dan Wahidah Alwi*

## Abstrak

Skripsi ini membahas tentang persamaan diferensial yang merupakan suatu persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas. Dengan memperhatikan banyaknya variabel bebas yang terlibat, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Jenis persamaan diferensial dapat dilihat dari bentuk, orde, koefisien maupun kelinearannya, sehingga banyak cara menyelesaikannya. Salah satunya dapat diselesaikan dengan cara menggunakan metode fungsi *green*. Pada skripsi ini dibagi atas dua pembahasan yaitu untuk mendapatkan fungsi *green* pada persamaan diferensial dan untuk mendapatkan fungsi *green* pada studi kasus dalam bidang fisika yaitu *Vibrasi Sistem Mekanis*. Terdapat dua kasus yaitu tidak ada peredam dalam sistem dan terdapat peredam dalam sistem. Fungsi *green* dapat ditemukan dengan menggunakan metode variasi parameter, dimana hasil untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter sebagai berikut:

$$G(x, t) = \frac{v_1(t) \cdot y_1(x) + v_2(t) \cdot y_2(x) + \dots + v_n(t) \cdot y_n(x)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]}. \text{ Untuk mendapatkan fungsi}$$

*green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter dalam bidang fisika yang studi kasusnya yaitu vibrasi sistem mekanis,

dapat dilihat sebagai berikut : 
$$G(t, x) = \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]}.$$

**Kata Kunci:** *Fungsi Green, Persamaan Diferensial Linear, Vibrasi Sistem Mekanis.*

## I. Pendahuluan

### A. Latar Belakang

Persamaan Diferensial Biasa dapat digolongkan dalam dua kelas yaitu persamaan diferensial tak linear dan persamaan diferensial linear. Dibandingkan dengan jenis yang kedua, penyelesaian persamaan diferensial linear jauh lebih mudah ditentukan karena sifat-sifat selesaiannya dapat dikarakterisasikan dalam suatu cara yang umum dan metode baku tersedia untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut. Menurut bentuk persamaannya, suatu persamaan diferensial linear dapat dibedakan menjadi dua yakni persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial tak homogen. Sedangkan menurut ordenya dapat dibedakan menjadi orde satu, orde dua sampai dengan orde- $n$ .

Fungsi *green* merupakan suatu metode penyelesaian yang dalam proses menemukan penyelesaian suatu persamaan diferensial linear, dimana terlebih dahulu ditentukan nilai fungsi *green* dari suatu persamaan diferensial tersebut. Nilai fungsi *green* dapat ditemukan dengan metode transformasi *Laplace* dan metode variasi parameter. Dalam Jurnal Integral yang berjudul “Mengkontruksi Fungsi *Green* Persamaan Diferensial Linear Orde- $n$ ”, sehingga memotivasikan penulis untuk mencoba melengkapi dan menjelaskan kepada pembaca mengenai metode fungsi *green* dan penyelesaian suatu persamaan diferensial tersebut yang di sertai dengan studi kasus dalam bidang fisika.

Pengaplikasian dalam bidang fisika dimana hampir sebagian besar gejala yang dibahas dalam fisika memiliki kaitan dengan permasalahan laju perubahan dari suatu besaran fisis tertentu. Contoh paling sederhana yang telah lama dijumpai adalah laju perubahan kecepatan suatu partikel terhadap waktu akibat gaya yang bekerja padanya sebagaimana diatur oleh Hukum Newton kedua. Secara matematik, gambaran dinamika perubahan tersebut dituang dalam bentuk persamaan diferensial.

Persamaan diferensial yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah “**Mendapatkan Fungsi *Green* yang Dikontruksi dari Persamaan**

## **Diferensial Linear dalam Bidang Fisika (Studi Kasus: *Vibrasi Sistem Mekanis*)”.**

### **B. Tujuan Penelitian**

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter.
2. Untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter dalam bidang fisika dengan studi kasus *vibrasi sistem mekanis*.

### **C. Batasan Masalah**

Dalam penulisan tugas akhir ini, pembahasannya hanya dibatasi pada:

1. Metode yang digunakan untuk mengkonstruksi fungsi *green* adalah metode variasi parameter.
2. Fungsi *green* yang digunakan pada persamaan diferensial linear yaitu fungsi *green* khusus yang merupakan suatu integral substitusi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear.
3. Aplikasi pada persamaan diferensial hanya pada bidang fisika yaitu *Vibrasi Sistem Mekanis* dan hanya sampai pada orde kedua.

## **II. Kajian Pustaka**

### **A. Persamaan Diferensial Linear**

#### **Definisi 2.5 :**

Persamaan diferensial linear adalah suatu persamaan diferensial yang berpangkat satu dengan peubah tak bebas beserta turunan-turunannya. Sebuah persamaan diferensial linier orde- $n$  memiliki bentuk

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.3)$$

di mana  $f(x)$  dan koefisien  $a_i(x)$ , dengan  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  tergantung hanya pada variabel  $x$ . Dengan kata lain, persamaan-persamaan ini tidak tergantung pada  $y$  atau pada turunan dari  $y$ .

Persamaan diferensial linear homogen orde- $n$  dengan koefisien konstan berbentuk sebagai berikut :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2.4)$$

dengan  $a_n \neq 0$ .

Dalam menentukan solusi persamaan diferensial homogen dilakukan hal berikut :

Misalkan  $y = e^{rx}$  merupakan solusi persamaan diferensial homogen.

Sehingga dimisalkan  $ay'' + by' + cy = 0$ . Dengan mensubstitusikan solusi tersebut dan turunannya ke dalam persamaan diferensial didapatkan :

$$a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) = 0$$

Untuk mendapatkan nilai turunan pertama dan turunan kedua maka :

- nilai  $f(x) = e^{rx}$
- nilai  $f'(x) = e^{rx} \cdot r = re^{rx}$
- nilai  $f''(x) = u'v + uv'$

$$\begin{array}{ll} \text{Misalkan} & u = r \quad v = e^{rx} \\ & u' = 0 \quad v' = r \cdot e^{rx} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } f''(x) &= u'v + uv' \\ &= (0)(e^{rx}) + (r)(re^{rx}) \\ &= r^2 e^{rx} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) = 0$$

$$\begin{aligned} a(r^2 e^{rx}) + b(re^{rx}) + c(e^{rx}) &= 0 \\ e^{rx}(ar^2 + br + c) &= 0 \end{aligned}$$

Sebab  $e^{rx} \neq 0, \forall x \in \mathfrak{R}$ , maka  $ar^2 + br + c = 0$  disebut persamaan karakteristik dari persamaan diferensial. Akar persamaan karakteristik dari persamaan diferensial adalah :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{dan} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \quad \quad = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Kemungkinan nilai  $r_1$  dan  $r_2$  bergantung dari nilai  $D$ , yaitu :

a. Bila  $D > 0$  maka  $r_1 \neq r_2$  (akar real dan berbeda)

Jika akar-akar persamaan karakteristik adalah real dan semuanya berbeda, maka solusi persamaan  $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$  merupakan bilangan real dan berbeda,  $r_1 \neq r_2$ . Maka  $y_1(x) = e^{r_1 x}$  dan  $y_2(x) = e^{r_2 x}$

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (2.5)$$

b. Bila  $D < 0$  maka  $r_1, r_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks, maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Jika tidak ada akar yang sama, maka solusi umumnya adalah  $y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$ . Sehingga solusi kompleks  $e^{(\lambda + i\mu)x}$  dan  $e^{(\lambda - i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi realnya  $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$ . Jadi, solusi umum persamaan diferensial yang mempunyai akar-akar kompleks adalah

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (2.6)$$

c. Bila  $D = 0$  maka  $r_1 = r_2$  (akar real dan sama)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar yang sama, maka solusi umumnya tidak lagi mempunyai bentuk seperti Persamaan (2.5), tetapi mempunyai bentuk berikut :  $e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{r_1 x}$ . Jika akar-akarnya berulang sebanyak  $s$  kali ( $s \leq n$ ), maka solusi umum Persamaan (2.5) adalah

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + \dots + c_n x^{s-1} e^{r_1 x} \quad (2.7)$$

Jika akar-akar kompleks berulang sebanyak  $s$  kali, maka solusi umumnya adalah:

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x + c_3 x e^{\lambda x} \cos \mu x + c_4 x e^{\lambda x} \sin \mu x + \dots + c_n x^{s-1} e^{\lambda x} \cos \mu x + c_{n+1} x^{s-1} e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (2.8)$$

## B. Fungsi Green

Pandang persamaan diferensial linear tak homogen orde- $n$  :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.20)$$

Dengan fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi yang kontinu. Fungsi  $G(x, t)$  dikatakan fungsi *green* untuk masalah nilai awal persamaan diferensial di atas jika memenuhi kondisi sebagai berikut :

a.  $G(x, t)$  terdefinisi pada daerah  $R = I \times I$  dari semua titik  $(x, t)$  dengan  $x$  dan  $t$  terletak dalam selang  $I$ .

b.  $G(x, t), \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n G}{\partial x^n}$  merupakan fungsi yang kontinu pada  $R = I \times I$ .

c. Untuk setiap  $x_0$  dalam selang  $I$ , fungsi  $y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x, t) h(t) dt(x)$  adalah

solusi persamaan diferensial tersebut memenuhi kondisi awal

$$y_p(x_0) = y_p'(x_0) = y_p''(x_0) = \dots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$$

## C. Tinjauan dalam Bidang Fisika (Vibrasi Sistem Mekanis)

*Vibrasi /Getaran* adalah gerakan bolak-balik dalam suatu interval waktu tertentu. Getaran berhubungan dengan gerak osilasi benda dan gaya yang berhubungan dengan gerak tersebut. Semua benda yang mempunyai massa dan elastisitas mampu bergetar, jadi kebanyakan mesin mengalami getaran sampai derajat tertentu dan rancangannya biasanya memerlukan pertimbangan sifat osilasinya.

**Kasus 1** : Tidak ada peredam dalam sistem.

Misalkan tidak ada peredam ( $\delta = 0$ ) dalam sistem (2.16) sehingga respon bebas diberikan oleh persamaan diferensial



$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$$

Sesuai metode penyelesaian persamaan diferensial linear orde kedua homogen, persamaan karakteristiknya adalah

$$m\lambda^2 + k = 0$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik ini adalah

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

$$= \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

karena  $m > 0, k > 0$

Jadi solusi persamaan diferensial tanpa redaman itu adalah

$$\begin{aligned} y &= A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$\text{dimana } \sin \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

solusi ini menggambarkan respon bebas yang dihasilkan, yang disebut gerak harmonik sederhana (yang diberikan oleh fungsi *sinus*) dengan periode  $\frac{2\pi}{\omega}$

dan frekuensi sebesar  $\frac{\omega}{2\pi}$ , dimana variabel  $\phi$  dinamakan sudut *phase* dan

$\sqrt{A^2 + B^2}$  adalah amplitudonya.

**Kasus 2** : Terdapat peredam dalam sistem ( $\delta > 0$ ).

Misalkan adanya peredam tidak dapat diabaikan maka dinamika sistem pegas massa dijelaskan oleh persamaan diferensial

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial ini adalah

$$m\lambda^2 + \delta\lambda + k = 0$$

dan mempunyai akar-akar dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana

$$a = m, b = \delta \text{ dan } c = k.$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4(m)(k)}}{2m} \\ &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m}\end{aligned}$$

Dengan demikian ada tiga jenis akar bergantung pada apakah  $\delta^2 - 4mk$  adalah negatif, nol atau positif. Untuk pembahasan setiap kasus jenis akar ini, dapat diasumsikan bahwa massa  $m$  dan konstanta pegas  $k$  adalah tetap, sedangkan koefisien gesek  $\delta$  meningkat.

a. Sistem pegas kurang teredam  $0 < \delta < \sqrt{4mk}$

Dalam kasus ini,  $\delta^2 - 4mk$  adalah negatif, maka terdapat sepasang akar kompleks konjugat yaitu

$$\lambda = -a \pm bi.$$

dimana

$$a = \frac{\delta}{2m}, b = \frac{\sqrt{4mk - \delta^2}}{2m}$$

Maka solusi persamaan diferensial ini adalah

$$\begin{aligned}y &= e^{-at}(A \cos bt + B \sin bt) \\ &= e^{-at} \sqrt{A^2 + B^2} \sin(bt + \phi)\end{aligned}$$

Persamaan  $e^{-at} \sqrt{A^2 + B^2} \sin(bt + \phi)$  ini menggambarkan osilasi teredam.

Untuk massa  $m$  dan konstanta pegas  $k$  yang diberikan, peningkatan resistensi (perlawanan)  $\delta$  (tetapi  $\delta < \sqrt{4mk}$ ) mempunyai dua efek yaitu

osilasi akan teredam lebih cepat dan periode osilasi yang sedang diredam,

$$\frac{2\pi}{b} \text{ meningkat.}$$

- b. Sistem pegas teredam kritis ( $\delta = \sqrt{4mk}$ ).

Dalam kasus ini terdapat akar kembar yaitu

$$\lambda = -\frac{\delta}{2m}$$

Sehingga solusi persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = (A + Bt)e^{\lambda t}$$

- c. Sistem pegas terlalu teredam ( $\delta > \sqrt{4mk}$ ).

Dalam kasus ini, persamaan karakteristiknya mempunyai dua akar negatif yang berbeda

$$-r_1 = -\frac{\delta}{2m} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m}$$

$$-r_2 = -\frac{\delta}{2m} - \frac{\sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m}$$

Jadi solusi persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}.$$

### III. Pembahasan

#### 1. Mendapatkan fungsi green yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter.

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde- $n$  yaitu sebagai berikut :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.3)$$

Solusi umum persamaan diferensial di atas adalah :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

dimana  $y_h(x)$  merupakan solusi umum persamaan diferensial homogenya dan  $y_p(x)$  merupakan solusi khususnya atau variasi parameter.

Untuk menentukan solusi khususnya, maka digunakan cara mengkonstruksi fungsi *green*. Adapun langkah-langkah untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear dengan menggunakan metode variasi parameter yaitu sebagai berikut :

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde- $n$  diubah ke bentuk persamaan diferensial homogenya.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2.4)$$

Misalkan  $y = e^{rx}$  merupakan solusi persamaan diferensial homogen. Sehingga dimisalkan  $ay'' + by' + cy = 0$  dengan mensubstitusikan solusi tersebut dan turunannya ke dalam persamaan diferensial didapatkan :

$$\begin{aligned} a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) &= 0 \\ e^{rx}(ar^2 + br + c) &= 0 \end{aligned}$$

Sebab  $e^{rx} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , maka  $ar^2 + br + c = 0$  disebut persamaan karakteristik dari persamaan diferensial. Akar persamaan karakteristik dari persamaan diferensial adalah :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \end{aligned} \quad \text{dan} \quad \begin{aligned} r_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \end{aligned}$$

Kemungkinan nilai  $r_1$  dan  $r_2$  bergantung dari nilai  $D$ , yaitu :

- Bila  $D > 0$  maka  $r_1 \neq r_2$  (akar real dan berbeda)

Jika akar-akar persamaan karakteristik adalah real dan semuanya berbeda, maka solusi persamaan  $e^{r_1x}, e^{r_2x}, \dots, e^{r_nx}$  merupakan bilangan real dan berbeda,  $r_1 \neq r_2$ . Maka  $y_1(x) = e^{r_1x}$  dan  $y_2(x) = e^{r_2x}$

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \\ y_h(x) &= c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x} + \dots + c_n e^{r_nx} \end{aligned} \quad (2.5)$$

- Bila  $D < 0$  maka  $r_1, r_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks, maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Jika tidak ada akar yang sama, maka solusi umumnya adalah  $y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$ . Sehingga solusi kompleks  $e^{(\lambda+i\mu)x}$  dan  $e^{(\lambda-i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi riilnya  $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$ . Jadi, solusi umum persamaan diferensial yang mempunyai akar-akar kompleks adalah

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (2.6)$$

- Bila  $D = 0$  maka  $r_1 = r_2$  (akar real dan sama)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar yang sama, maka solusi umumnya tidak lagi mempunyai bentuk seperti Persamaan (2.5), tetapi mempunyai bentuk berikut :  $e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{r_1 x}$ . Jika akar-akarnya berulang sebanyak  $s$  kali ( $s \leq n$ ), maka solusi umum Persamaan (2.5) adalah

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + \dots + c_n x^{s-1} e^{r_1 x} \quad (2.7)$$

Jika akar-akar kompleks berulang sebanyak  $s$  kali, maka solusi umumnya adalah :

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x + c_3 x e^{\lambda x} \cos \mu x + c_4 x e^{\lambda x} \sin \mu x + \dots + c_n x^{s-1} e^{\lambda x} \cos \mu x + c_{n+1} x^{s-1} e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (2.8)$$

Untuk Persamaan (2.4) dimisalkan  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  merupakan solusi untuk persamaan diferensial homogenya maka  $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$  dengan  $c_1, c_2, \dots, c_n$  merupakan konstanta. Selanjutnya menentukan solusi khusus atau variasi parameter  $y_p(x)$  dengan suatu integral khusus mempunyai bentuk

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \dots + v_n(x)y_n(x) \quad (2.12)$$

dengan  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$  adalah fungsi-fungsi tak diketahui yang harus ditentukan.

Untuk mencari  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ , pertama kali diselesaikan sistem persamaan linear berikut ini untuk  $v_1'(x), v_2'(x), \dots, v_n'(x)$ :

$$\begin{aligned} v_1' y_1 + v_2' y_2 + \dots + v_n' y_n &= 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' + \dots + v_n' y_n' &= 0 \\ \vdots \\ v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \dots + v_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\ v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \dots + v_n' y_n^{(n-1)} &= \frac{f(x)}{a_0} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sehingga nilai  $v_k'(x)$  dapat ditentukan dengan menggunakan aturan cramer. Dimana menurut Teorema 2.3 di kajian teori yang memenuhi aturan cramer yang berbentuk matriks  $AX = B$  dimana :

$$A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_n^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(x)}{a_0} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix}$$

$AX = B$  adalah sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan linear dalam  $n$  bilangan tak diketahui sehingga  $\det(A) \neq 0$ , maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang unik. Pemecahan ini adalah :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_n^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{disebut juga determinan Wronski}$$

yang  $W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$  dimana  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  merupakan selesaian bebas linear, maka  $W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] \neq 0$ . Sehingga syarat pada teorema tersebut terpenuhi. Jadi sistem tersebut mempunyai selesaian seperti :

$$v_k'(x) = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_{k-1}^{n-1} & \frac{f(x)}{a_0} & y_{k+1}^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

dengan  $k = 1, 2, \dots, n$

Misalkan pula  $v_k(x)$  merupakan determinan yang diperoleh dari

$$W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] \text{ dengan menggantikan kolom ke-} k \text{ dengan } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

jadi nilai  $v_k$  dapat ditulis :

$$v_k(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_{k-1}^{n-1} & 1 & y_{k+1}^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} \cdot f(x)$$

$$\text{Misalkan nilai } v_k(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_{k-1}^{n-1} & 1 & y_{k+1}^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

dengan  $k = 1, 2, \dots, n$

sehingga

$$v_k(x) = \frac{v_k(x) \cdot f(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]}$$

Setelah mendapatkan nilai  $v_k'(x)$  maka dapat ditentukan nilai  $v_k(x)$  dengan mengintegrasikan  $v_k'(x)$  terhadap  $x$  dengan batas atas  $x$  dan batas bawah  $x_0$ .

$$v_k = \int_{x_0}^x \frac{v_k(t) \cdot f(t)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} dt \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, n$$

Kemudian disubstitusi nilai  $v_k(x)$  dengan persamaan (2.12) sehingga diperoleh fungsi *green*  $G(x, t)$

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \dots + v_n(x)y_n(x)$$

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \frac{v_1(t) \cdot f(t)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} dt \cdot y_1(x) + \int_{x_0}^x \frac{v_2(t) \cdot f(t)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} dt \cdot y_2(x) + \dots + \int_{x_0}^x \frac{v_n(t) \cdot f(t)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} dt \cdot y_n(x)$$

$$= \int_{x_0}^x \frac{v_1(t) \cdot y_1(x) + v_2(t) \cdot y_2(x) + \dots + v_n(t) \cdot y_n(x)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]} f(t) dt$$

$$= \int_{x_0}^x G(x, t) \cdot f(t) dt$$

$$\text{dengan } G(x, t) = \frac{v_1(t) \cdot y_1(x) + v_2(t) \cdot y_2(x) + \dots + v_n(t) \cdot y_n(x)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]}$$

## 2. Mendapatkan fungsi green yang di kontruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter (studi kasus: vibrasi sistem mekanis).

Misalkan tidak ada peredam ( $\delta = 0$ ) dalam sistem (2.16) sehingga respon bebas diberikan oleh persamaan diferensial

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$$

Sesuai metode penyelesaian persamaan diferensial linear orde kedua homogen, persamaan karakteristiknya adalah

$$m\lambda^2 + k = 0$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik ini adalah



$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

$$= \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{karena } m > 0, k > 0$$

Jadi solusi persamaan diferensial tanpa redaman itu adalah

$$y = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

### Contoh 1:

Beban seberat 7 kg digantungkan pada pegas dengan modulus 36/35 kg/cm. Pada  $t = 0$  sementara bebas sedang menggantung dalam posisi setimbang, tiba-tiba diberikan kecepatan awal sebesar 48 cm/detik dalam arah ke bawah. Dengan mengambil percepatan gravitasi  $g = 980 \text{ cm/detik}^2$ , hitunglah pergeseran vertikal dari beban itu sebagai fungsi dari waktu  $t$  ?

Penyelesaian :

Model matematis untuk sistem pegas ini diberikan oleh masalah nilai awal

$$\frac{7}{980} y'' + \frac{36}{35} y = 0$$

Berdasarkan uraian Persamaan (2.21) pada Bab II dapat dituliskan kondisi awal sebagai berikut :

$$y(0) = 0 \quad (\text{karena beban mulai bergerak dari posisi keseimbangannya}),$$

$$y'(0) = -48 \quad (\text{karena kecepatan awal dengan arah ke bawah}).$$

Persamaan diferensial homogenya :

$$\frac{7}{980} y'' + \frac{36}{35} y = 0$$

Misalkan  $y = e^{rx}$  maka disubsitusikan ke persamaan diferensial homogen sehingga:

$$\frac{7}{980}(e^{rx})'' + \frac{36}{35}(e^{rx})' = 0$$

$$e^{rx}\left(\frac{7}{980}r^2 + \frac{36}{35}r\right) = 0$$

dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimana  $a = \frac{7}{980}, b = 0$  dan  $c = \frac{36}{35}$

sehingga

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{\pm \sqrt{(0)^2 - 4\left(\frac{7}{980}\right)\left(\frac{36}{35}\right)}}{2\left(\frac{7}{980}\right)} \\ &= \frac{\pm \sqrt{(0)^2 - 4\left(\frac{7}{980}\right)\left(\frac{36}{35}\right)}}{2\left(\frac{7}{980}\right)} \\ &= \frac{\pm \sqrt{-\frac{36}{1225}}}{\frac{1}{70}} \\ &= \frac{\pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{36}{1225}}}{\frac{1}{70}} \\ &= \frac{\pm i \frac{6}{35}}{\frac{1}{70}} \\ &= \pm i 12 \end{aligned}$$

Karena  $r_1, r_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner) maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Sehingga solusi kompleks  $e^{(\lambda+i\mu)x}$  dan  $e^{(\lambda-i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi riilnya  $e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$  Jadi,

solusi umum persamaan diferensial yang mempunyai akar-akar kompleks adalah

$$\begin{aligned}y_h(x) &= c_1 e^{(0)x} \cos(12t) + c_2 e^{(0)x} \sin(12t) \\&= c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t)\end{aligned}$$

dengan :

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \cos(12t) & y_1'(t) &= -\sin(12t) \\y_2(t) &= \sin(12t) & y_2'(t) &= \cos(12t)\end{aligned}$$

digunakan bebas linear atau wronskian :

$$\begin{aligned}W[y_1(x), y_2(x)] &= \begin{vmatrix} \cos(12x) & \sin(12x) \\ -\sin(12x) & \cos(12x) \end{vmatrix} \\&= \cos^2(12x) - (-\sin^2(12x)) \\&= \cos^2(12x) + \sin^2(12x) \\&= 1\end{aligned}$$

dengan menggunakan aturan cramer maka dapat dicari nilai  $v(x)$  :

$$\begin{aligned}v_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & \sin(12x) \\ 1 & \cos(12x) \end{vmatrix} \\&= 0 - \sin(12x) \\&= -\sin(12x)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}v_2(x) &= \begin{vmatrix} \cos(12x) & 0 \\ -\sin(12x) & 1 \end{vmatrix} \\&= \cos(12x) - 0 \\&= \cos(12x)\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai fungsi *green* :

$$\begin{aligned}G(t, x) &= \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]} \\&= \frac{-\sin(12x) \cdot \cos(12t) + \cos(12x) \cdot \sin(12t)}{1} \\&= (\sin(12t) \cos(12x)) - (\cos(12t) \sin(12x))\end{aligned}$$

$$= \sin(12t - 12x)$$

Dengan mendapatkan nilai fungsi *green* sehingga dapat diselesaikan solusi khususnya atau variasi parameternya yaitu :

$$f(t) = 0$$

Jadi solusi khususnya :

$$\begin{aligned} y_p &= \int_{t_0}^t \sin(12t - 12x)(0) dx \\ &= 0 \int_{t_0}^t \sin(12t - 12x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga nilai  $y_p = 0$

jadi solusi umumnya :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

dimana,

$$y_h = c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t)$$

$$y_p = 0$$

$$y(t) = c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t) + 0$$

Untuk mencari nilai  $c_1$  dan  $c_2$ , maka digunakan nilai awal  $y(0) = 0$  dan

$$y'(0) = -48 \text{ yaitu :}$$

- Syarat awal  $y(0) = 0$

$$y(t) = c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t)$$

$$y(0) = c_1 \cos(12t) + c_2 \sin(12t)$$

$$0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$

$$= c_1(1) + c_2(0)$$

jadi  $c_1 = 0$

- Syarat awal  $y'(0) = -48$

$$y'(t) = -12c_1 \sin(12t) + 12c_2 \cos(12t)$$

$$y'(0) = -12c_1 \sin(0) + 12c_2 \cos(0)$$

$$-48 = 12c_2$$

$$c_2 = -\frac{48}{12}$$

jadi  $c_2 = -4$

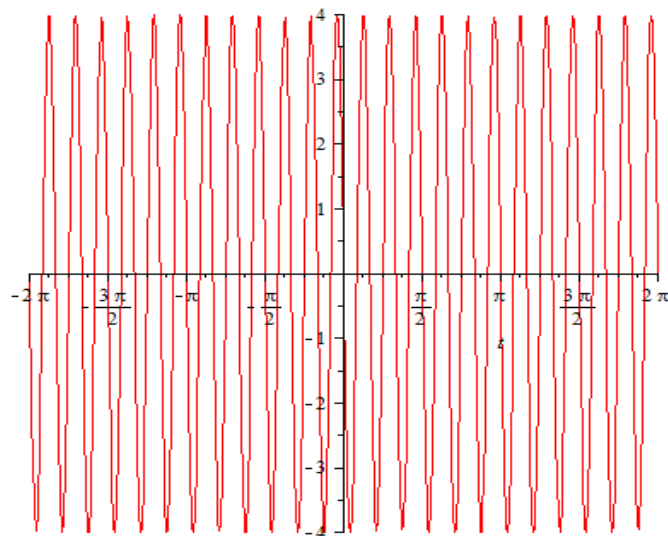
Jadi solusi umumnya adalah

$$y(t) = -4 \sin(12t)$$

Jadi solusi khusus untuk persamaan  $\frac{7}{980}y'' + \frac{36}{35}y = 0$  dengan syarat awal

yang digunakan  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = -48$  adalah  $y(t) = -4 \sin(12t)$

Amplitudo dari gerak harmonik ini adalah 4 cm, artinya bahwa beban berayun naik turun maksimal 4 cm di atas dan di bawah posisi keseimbangannya, yang dapat dilihat pada Gambar 4.1 berikut ini :



**Gambar 4.1 Gerak Harmonik**

#### **IV. Penutup**

##### **A. Kesimpulan**

Berdasarkan uraian diatas dapat di simpulkan bahwa :

1. Untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter sebagai berikut:

$$G(x,t) = \frac{v_1(t) \cdot y_1(x) + v_2(t) \cdot y_2(x) + \dots + v_n(t) \cdot y_n(x)}{W[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]}.$$

2. Untuk mendapatkan fungsi *green* yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linear melalui metode variasi parameter dalam bidang fisika yang studi kasusnya yaitu *vibrasi sistem mekanis*, sebenarnya hampir sama tanpa menggunakan studi kasus dalam fisika, yang membedakan hanya pada penyelesaian solusi umum studi kasus dalam fisika hanya sampai orde 2 dan terlebih dahulu harus menentukan model matematikanya, dapat dilihat sebagai berikut :

$$G(t, x) = \frac{v_1(x) \cdot y_1(t) + v_2(x) \cdot y_2(t)}{W[y_1(x), y_2(x)]} .$$

## B. Saran

Masalah yang dibahas dalam tugas akhir ini masih berbentuk sederhana karena dalam fungsi *green* pada persamaan diferensial linear hanya terbatas pada pembahasan untuk menemukan nilai fungsi *green* dari suatu persamaan diferensial linear dengan menggunakan metode variasi parameter saja. Untuk itu perlu adanya pembahasan lebih lanjut, misalnya tentang aplikasi fisika pada masalah lainnya seperti pada persamaan diferensial parsial melalui metode transformasi *Laplace* dengan menggunakan fungsi *Green*.

## V. Daftar Pustaka

- Alfi Fauzi, Fendi, *Persamaan Diferensial*, <http://pd-completed.pdf-Adobe.Reader/> diakses 7-12-2012.
- Bronson, Richar, *Persamaan Diferensial Edisi Ketiga*, 2007, Jakarta: Penerbit Erlangga
- Budi Nugroho, Didit, 2009, *Persamaan Diferensial Biasa*, Universitas Kristen Satya Wacana
- Darmawijoyo, 2011. *Persamaan Diferensial Biasa : Suatu Pengantar*. Palembang: Penerbit Erlangga
- Frank Ayres, JR, 1999, *Kalkulus Edisi Empat*, Jakarta: Penerbit Erlangga
- Hanid, Abdul, 2012, *Pratikal Vibrasi Mekanis Teori dan Praktik* , Yogyakarta: Graha Ilmu
- Herdiana, Heris, 2011, *Persamaan Diferensial*, Bandung: Pustaka

- J, Edwin, 1987, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jakarta: Erlangga
- Kartono, 2012, *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*, Yogyakarta: Graha Ilmu
- Kusumawati, Ririen, 2009, *Aljabar Linear & Matriks*, Surabaya: UIN-Malang Press
- Mursita, Danang, 2011, *Matematika untuk Perguruan Tinggi*, Bandung: Rekayasa Sains
- R Spiegel, Murray, 1971, *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuan*, Bandung: Penerbit Erlangga
- Rahman, Abdul, 2007, *Persamaan Diferensial Biasa Teori dan Aplikasi*, Makassar: Tim Penulis
- Santoso, Widiarti, 1998, *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*, Jakarta: Erlangga
- Sudirham, Sudaryatno, *Integral dan Persamaan Diferensial*,  
<http://persamaan-diferensial-orde11.pdf-Adobe.Reader> / diakses 7-12-2012
- Sugiarto, Iwan, 2002, *Mengkonstruksi Fungsi Green Persamaan Diferensial Linear Orde-n*, Jurnal Integral: Universitas Parahyangan Bandung